

# Mainzer Fachgespräch Stahlbau

10. November 2000

In Zusammenarbeit mit:

**SIS**

**Schneider Imse Schneider**  
Ingenieursozietät GbR

und

**Prof. Dr.-Ing. Harald Friemann**



# **Tragsicherheitsnachweise gegen Biegedrillknicken nach DIN 18800**

Referent:

**Prof. Dr.-Ing. H. Friemann**



## Inhalt

- 1. Übersicht**
- 2. Sicherheitsbeiwerte**
- 3. Vorverformungen**
- 4. Berechnungsverfahren**
- 5. Verfahren elastisch-elastisch (E-E)**
  - 5.1 Voraussetzungen
  - 5.2 Tragsicherheitsnachweis
- 6. Verfahren elastisch-plastisch (E-P)**
  - 6.1 Voraussetzungen
  - 6.2 Tragsicherheitsnachweis
- 7. Ersatzstabverfahren**
  - 7.1 Definition
  - 7.2 Voraussetzungen
  - 7.3 Kritische Lastgrößen
  - 7.4 Interaktionsbedingungen

## 1. Übersicht

Der Biegedrillknicknachweis ist für einen aus dem Gesamtsystem herausgelöst gedachten Einzelstab zu führen. Dabei sind die am Gesamtsystem ermittelten Schnittgrößen, die auf die Enden dieses Stabes einwirken, als äußere Lasten anzusetzen. Außerdem sind die am Stab selbst wirkenden Lasten mitzunehmen [18800-2, (112)]. Die in Wirklichkeit vorhandene Einbindung des Einzelstabes in das Gesamtsystem ist durch die Vorgabe der Lagerungsbedingungen des Einzelstabes zu simulieren.

Im Normalfall wird ein mindestens einfach-symmetrisches Profil vorausgesetzt, das in der Symmetrieebene belastet wird. Die Symmetrieachse wird mit der vertikalen z-Achse gleichgesetzt. Unter der kritischen Lastgröße wird der Träger gegen Verformungen rechtwinklig zur Symmetrieebene und/oder gegen Verdrehungen um die Stabachse instabil, es stellt sich der Verzweigungsfall Biegedrillknicken ein. Eine Ausnahme bilden U- und C-Profile, deren Symmetrieachse y horizontal liegt und nicht mit der Lastebene xz identisch ist. Bei diesen Profilen wird jedoch vorausgesetzt, dass die Lastebene durch den Schubmittelpunkt verläuft, so dass sich unter dieser Lasteinwirkung ebenfalls Biegedrillknicken als Verzweigungsproblem einstellt (es gelten dieselben Differentialgleichungen). Damit können auch die Traglastkurven der I-Profile übernommen werden, was durch Versuchsreihen überprüft wurde.

Wird der Träger zusätzlich durch Horizontallasten rechtwinklig zur Symmetrieebene (bei U-Profilen in Richtung der Symmetrieachse y) belastet, liegt ein räumliches Spannungsproblem vor. Auch in diesem Fall stellt die Biegedrillknicklast, die sich ausschließlich auf die Vertikallasten bezieht, eine theoretische obere Lastgrenze dar. Dabei ist allerdings zu beachten, dass die Biegesteifigkeit  $E \cdot I_y$  in der Symmetrieebene deutlich größer sein sollte als die Biegesteifigkeit  $E \cdot I_z$  um die schwache Achse. Außerdem sollte die Symmetrieebene die Hauptlastebene sein. Im allgemeinen wird man den räumlich belasteten Träger nach der Spannungstheorie II. Ordnung nachweisen. Für den Sonderfall, dass keine Torsionsbelastung vorliegt, ist auch das Ersatzstabverfahren anwendbar.

Biegeknicken in der Symmetrieebene (bei U-Profilen in der Lastebene xz) ist als Verzweigungsproblem getrennt nachzuweisen [18800-2, Element (112)]. Für Tragsicherheitsnachweise gegen Biegedrillknicken sind nach DIN 18800-2 mehrere Möglichkeiten gegeben, die allerdings an bestimmte Voraussetzungen gebunden sind, so dass in vielen Fällen nur eine dieser Möglichkeiten genutzt werden kann.

Folgende Lösungsverfahren sind möglich [18800-2, (112), Tabelle 1]:

- **Elastisch-elastisch**, Berechnung der Schnittgrößen nach der Elastizitätstheorie, Absicherung der maximalen Spannung im Stab gegen die Streckgrenze.
- **Elastisch-plastisch**, Berechnung der Schnittgrößen nach der Elastizitätstheorie, Absicherung der Schnittgrößen an der maximal beanspruchten Trägerstelle gegen Erreichen eines Fließgelenkes.
- **Ersatzstabverfahren** = Vereinfachter Tragsicherheitsnachweis.

Außerdem sind in 18800-2, Abschnitt 3, Sonderfälle aufgeführt, in denen der Tragsicherheitsnachweis gegen Biegedrillknicken näherungsweise geführt werden oder auch ganz entfallen kann, sofern bestimmte Lagerungsbedingungen eingehalten sind.

## 2. Sicherheitsbeiwerte

Grundsätzlich sind alle Nachweise für die  $\gamma_F$ -fachen Einwirkungen zu führen. Die Teilsicherheitsbeiwerte  $\gamma_F$  sind DIN 18800-1, Abschnitt 7, zu entnehmen.

Bei der Ermittlung der Widerstandsgrößen ist außerdem der Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_M$  zu berücksichtigen [18800-1, Abschnitt 7.3]. Mit diesem Wert sind sowohl die Festigkeiten - hier die Streckgrenze  $f_{y,k}$  - als auch die Steifigkeiten abzumindern. Diese zweite Aussage bezieht sich auf den **Elastizitätsmodul**, dessen charakteristische Größe  $E_k$  nach 18800-1, Tabelle 1, vorgegeben ist. Zur Ermittlung aller Steifigkeitswerte (z.B.  $E \cdot I_y$ ,  $G \cdot I_T$  oder  $E \cdot C_M$ ) ist der Bemessungswert  $E_d = E_k / \gamma_M$  einzusetzen. Auch bei der Ermittlung der **Federsteifigkeiten** angrenzender Bauteile ist diese Abminderung des Elastizitätsmoduls zu beachten.

Nach DIN 18800-2, Element (117), besteht die Möglichkeit, den Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_M$  in alle Einwirkungen mit einzurechnen. In diesem Fall sind für alle Festigkeiten und Steifigkeiten die charakteristischen Werte einzusetzen.

## 3. Vorverformungen

Die Vorverformungen sind nach 18800-2, Abschnitt 2, anzusetzen. Sie sind als Ersatzimperfectionen zu interpretieren, die nicht allein den Einfluß geometrischer, sondern auch struktureller Imperfectionen (z.B. Eigenspannungen oder Fließgrenzenstreuungen) auf die Tragsicherheit des Trägers berücksichtigen sollen.

Beim Biegedrillknicken ist lediglich eine seitliche Vorkrümmung  $v(x)$  anzusetzen, wobei der Stich  $v_0$  der Vorkrümmung nach 18800-2, Tabelle 3, auf die Hälfte abgemindert werden darf [18800-2, Element (202)].

Das Hauptproblem besteht darin, den Verlauf der Vorkrümmung über die Trägerlänge und die für den Stich maßgebende Bezugslänge  $L$  zu wählen. In vielen Fällen kann nur die Knickfigur Aufschluß darüber geben, welcher Vorverformungsverlauf im ungünstigsten Fall anzusetzen ist. Im Zweifelsfall sind auch verschiedene Annahmen zu treffen. Normalerweise liefert eine zur Knickfigur affine Vorverformung die gesuchten maximalen Beanspruchungen. Die Bezugslängen  $L$  sind in etwa aus den Nulldurchgängen der Knickfigur  $v(x)$  abzulesen. Es kann jedoch auch erforderlich sein, z.B. zur Berechnung der Kräfte in seitlichen Federn oder Halterungen, andere Vorverformungen anzusetzen als für den Nachweis des Trägers selbst.

Eine Vorverdrehung  $\vartheta_0$  um die Stabachse  $x$  ist in DIN 18800 nicht festgelegt. Es gibt jedoch Sonderfälle, z.B. ein auf zentrischen Druck belasteter Stab mit einem doppelt symmetrischen Profil, zusammengesetzt aus zwei I-Profilen, bei dem nur eine Vorverdrehung  $\vartheta_0$  auf ein Spannungsproblem Theorie II. Ordnung führt. In diesem Fall ist entweder das Ersatzstabverfahren anzuwenden oder die Größe der Vorverdrehung muß eigenverantwortlich gewählt werden.

## 4. Berechnungsverfahren

Im allgemeinen wird das Biegedrillknicken durch ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem für die seitliche Verschiebung  $v$  und die Stabverdrehung  $\vartheta$  oder durch einen entsprechenden Potentialausdruck beschrieben. Da in diesen Gleichungen normalerweise nicht-konstante Koeffizienten auftauchen, gibt es nur für wenige Sonderfälle (z.B.  $N=\text{konst.}$  oder  $M_y=\text{konst.}$ ) geschlossene Lösungen. In allen anderen Fällen muß man auf numerische Lösungen ausweichen.

Für einfache Lastfälle sind in DIN 18800-2 [Abschnitt 3, Gl.(19)] oder in der Fachliteratur Formeln enthalten, nach denen die kritischen Lasten näherungsweise ermittelt werden können. Sofern die Lagerungs- und Lastbedingungen des Trägers mit den dort genannten Voraussetzungen übereinstimmen, stimmen die Ergebnisse gut mit genaueren Lösungen überein. Es werden auch Programme angeboten, die die in der Literatur veröffentlichten Lösungen für die verschiedensten Lagerungs- und Lastfälle auswerten und damit eine schnelle Ermittlung der kritischen Lasten ermöglichen.

Dem stehen jedoch die allgemeinen numerischen Lösungsverfahren gegenüber, die nahezu zu jedem Last- und Lagerungsfall genaue Lösungen liefern und somit alle Näherungs-lösungen, Diagramme oder Nomogramme u.ä. überflüssig machen. Sie werden inzwischen ebenfalls als Programme angeboten.

Näherungslösungen für Probleme der Spannungstheorie II. Ordnung liegen nicht vor, hier können nur die genannten numerischen Lösungsverfahren zum Ziel führen. Die meisten dieser Verfahren arbeiten nach der Energiemethode (RITZ'sches oder GALERKIN'sches Verfahren), die den Einsatz eines Computers erforderlich machen. Grundsätzlich ist auch der Einsatz von FE-Verfahren möglich, allerdings ist der damit verbundene Aufwand meist so groß, dass sich der Einsatz eines FE-Verfahrens in der Praxis zur Zeit noch nicht lohnt.

## 5. Verfahren elastisch-elastisch (E-E)

### 5.1 Voraussetzungen

Der Tragsicherheitsnachweis nach diesem Verfahren ist normalerweise immer zulässig. Die wichtigste Voraussetzung betrifft die  $(b/t)$ -Verhältnisse der Querschnittsteile [18800-2, (119)]. Soll bei der Ermittlung der Querschnittsgrößen die volle Fläche aller druckbeanspruchten Querschnittsteile berücksichtigt werden, muß gewährleistet sein, dass diese Querschnittsteile nicht vor Erreichen der elastischen Grenzschnittsgrößen durch Beulen versagen. Diese Voraussetzung wird durch Einhalten der Werte  $\text{grenz}(b/t)$  nach DIN 18800-1, Tabelle 12 und 13, erfüllt. Bei den meisten Walzprofilen wird diese Bedingung eingehalten, nur bei einzelnen Profilen mit sehr schlanken Stegen werden unter konstanter Druckbeanspruchung die Werte  $\text{grenz}(b/t)$  nicht eingehalten. Die in den Tabellen 12 und 13 enthaltenen Werte wurden allerdings sehr konservativ ermittelt, so dass eine genauere Ermittlung von  $\text{grenz}(b/t)$  im Einzelfall den erforderlichen Nachweis begünstigen kann.

Wird die Voraussetzung  $\text{vorh}(b/t) < \text{grenz}(b/t)$  nicht erfüllt, sind die Querschnittswerte nach DIN 18800-2, Abschnitt 7, abzumindern.

## 5.2 Tragsicherheitsnachweis

Die Berechnung ist normalerweise nach Theorie II. Ordnung durchzuführen. Dabei ist auch eine Torsionsbeanspruchung einzubeziehen. Zusätzlich zu den vorgegebenen Lasten sowie den am Gesamtsystem ermittelten Endschnittsgrößen sind Vorverformungen anzusetzen [18800-2, (116)]. Dabei darf beim Verfahren elastisch-elastisch die Maximalordinate der Vorkrümmung nochmals auf 2/3 des Wertes abgemindert werden [18800-2, Element (201)].

Der Nachweis umfaßt zwei Punkte :

- Erstens ist nachzuweisen, dass der Träger im stabilen Gleichgewicht ist, die kritische Lastgröße darf nicht überschritten sein. Die Höhe der kritischen Laststufe selbst spielt keine Rolle.
- Zweitens ist nachzuweisen, dass die maximale Randspannung höchstens den Bemessungswert  $f_{y,d}$  der Streckgrenze erreicht [18800-2, (121)]. Normalerweise ist dazu die Vergleichsspannung für den maximal beanspruchten Punkt im gesamten Träger zu ermitteln. Tritt die maximale Vergleichsspannung nur örtlich begrenzt auf, darf die Grenzspannung  $f_{y,d}$  um 10% überschritten werden.

In den meisten Fällen wird die maximale Randspannung an einem äußeren Eckpunkt des Querschnitts auftreten. Dort sind die Schubspannungen infolge Querkraft und St.Venant'scher Torsionsmomente Null, so dass es dort nicht erforderlich ist, eine Vergleichsspannung zu ermitteln. Sobald jedoch eine größere Torsionsbeanspruchung vorliegt, ist immer zu überprüfen, ob nicht die Vergleichsspannung an anderen Querschnittspunkten maßgebend wird.

## 6. Verfahren elastisch-plastisch (E-P)

### 6.1 Voraussetzungen

Der Tragsicherheitsnachweis nach diesem Verfahren ist nur für bestimmte Profiltypen zulässig, für die Interaktionsbedingungen der vollplastischen Schnittgrößen vorliegen.

Eine weitere wichtige Voraussetzung betrifft ebenfalls die (b/t)-Verhältnisse der Querschnittsteile [18800-2, (119)]. Soll bei der Ermittlung der Querschnittsgrößen die volle Fläche aller druckbeanspruchten Querschnittsteile berücksichtigt werden, muß gewährleistet sein, dass diese Querschnittsteile nicht vor Erreichen der vollplastischen Schnittgrößen durch Beulen versagen. Diese Voraussetzung wird durch Einhalten der Werte  $g_{renz}(b/t)$  nach DIN 18800-1, Tabelle 15, erfüllt. (Siehe auch die oberen Anmerkungen zum Verfahren elastisch-elastisch.)

## 6.2 Tragsicherheitsnachweis

Die Berechnung ist normalerweise nach Theorie II. Ordnung durchzuführen. Dabei ist auch eine Torsionsbeanspruchung einzubeziehen. Zusätzlich zu den vorgegebenen Lasten sowie den am Gesamtsystem ermittelten Endschnittsgrößen sind die Vorverformungen wie oben beschrieben anzusetzen [18800-2, (116)], die weitere Abminderung um 2/3 ist in diesem Fall nicht zulässig.

Der Nachweis umfaßt zwei Punkte :

- Erstens ist nachzuweisen, dass der Träger im stabilen Gleichgewicht ist, die kritische Lastgröße darf nicht überschritten sein. Die Höhe der kritischen Laststufe selbst spielt keine Rolle.
- Zweitens ist nachzuweisen, daß in keinem Trägerschnitt die Schnittgrößen unter Beachtung der Interaktion zu einem Überschreiten der vollplastischen Schnittgrößen führen.

Welche Interaktionsbedingungen für diesen Nachweis genutzt werden, schreibt DIN 18800 nicht zwingend vor [18800-2, Element (121)], nur für doppelsymmetrische I-Profile sind entsprechende Interaktionsbedingungen in DIN 18800-1, Element (757) angegeben. Die Übernahme anderer Interaktionsbedingungen aus der Literatur ist zulässig.

Bei der Anwendung der Interaktionsbedingungen nach 18800-1, Element (757) sind eine Reihe von Bedingungen zu beachten :

- Es muß ein doppelsymmetrisches I-Profil vorliegen.
- Für einachsige Biegung um die y- bzw. z-Achse gelten die Tabellen 16 oder 17. Dabei sind auch die Querkräfte  $V_z$  bzw.  $V_y$  einzubeziehen. Ist  $V > 0,90 \cdot V_{pl}$ , verlieren die Interaktionsbedingungen dieser Tabellen ihre Gültigkeit, maßgebend wird dann das Querkraftversagen des Profils.
- Für zweiachsige Biegung gelten die Gln.(41) und (42), wobei eine eventuelle Beanspruchung infolge eines Wölbmomentes  $M_w$  additiv hinzuzunehmen ist [siehe den Kommentar zu DIN 18800-1]. Für diesen Lastfall gelten schärfere Bedingungen für die Größe der zulässigen Querkräfte.
- Für die vollplastischen Schnittgrößen sind die mit  $\gamma_M$  abgeminderten Größen einzusetzen.
- Es ist zu beachten, dass das vollplastische Moment um die schwache Achse auf den Wert  $M_{pl,z,d} = 1,25 \cdot \sigma_{R,d} \cdot W_z$  zu begrenzen ist, wobei  $\sigma_{R,d}$  die um  $\gamma_M$  abgeminderte Grenzspannung ist. Grundsätzlich ist der Formbeiwert auf  $\alpha_{pl} = 1,25$  zu begrenzen [18800-2, Element (123)].

## 7. Ersatzstabverfahren

### 7.1 Definition

Als Ersatzstabverfahren wird ein vereinfachter Tragsicherheitsnachweis bezeichnet, bei dem mit Hilfe der kritischen Lastgrößen auf die Traglast des Trägers rückgeschlossen wird. Die Lagerung und Belastung des aus dem Gesamtsystem herausgeschnitten gedachten Einzelstabes wird wie oben beschrieben vorgegeben. Die Berechnung erstreckt sich in diesem Fall ausschließlich auf die Größe der kritischen Laststufe der in der xz-Ebene wirkenden Lasten, unter der der Träger seitlich ausweicht und/oder sich gleichzeitig verdreht. Über die Schlankheiten  $\lambda$  werden die zugehörigen Traglasten ermittelt und den vorhandenen Lasten gegenübergestellt.

Die Schlankheit  $\lambda$  ist in diesem Fall ein Parameter, über den die Traglast des jeweiligen Lastfalles aus Formeln, Tabellen oder Diagrammen abgelesen wird. Bei „planmäßig mittigem Druck“ sind die europäischen Knickspannungskurven maßgebend, die für diesen Lastfall auch auf die Versagensformen Drillknicken oder Biegedrillknicken angewandt werden. Für den Lastfall „Einachsige Biegung“ wurden in DIN 18800-2, Gl.(18), spezielle Traglastkurven eingeführt. Auch diese Traglastkurven sind wie die europäischen Knickspannungskurven querschnittsbezogen [18800-2, Tabelle 3]. Ihr Verlauf wurde an einer Vielzahl von Versuchen ausgerichtet, nähere Einzelheiten zu den Hintergründen sind im Kommentar zur DIN 18800 nachzulesen. Allerdings wurden nur einfach- und doppelt-symmetrische I-Profile sowie U- und C-Profile durch Versuche abgesichert, für andere Profiltypen fehlen die zugehörigen Traglastkurven.

### 7.2 Voraussetzungen

Nach DIN 18800-2 werden 4 Lastfälle unterschieden, für die das Ersatzstabverfahren angewandt werden darf, für die jedoch unterschiedliche Voraussetzungen gelten :

- **Planmäßig mittlerer Druck.**  
Querschnitt über die Trägerlänge konstant, zur Form ist keine Eingrenzung zu beachten.  
Die Trägerenden müssen unverschieblich gelagert sein [18800-2, Element (306)].  
Die kritische Druckkraft kann sich auf Biegeknicken oder auch auf Drillknicken beziehen. In beiden Fällen sind zur Ermittlung der Traglast die Europäischen Knickspannungskurven maßgebend.
- **Einachsige Biegung ohne Normalkraft.**  
Querschnitte : I-Profile, U- oder C-Profile.  
Torsion ist ausgeschlossen.  
Der Momentenverlauf  $M_y(x)$  im Träger darf nach Theorie I. Ordnung ermittelt werden [18800-2, Element (303)]. Die Tragsmomente sind den Traglastkurven, die über die Formel (18) vorgegeben sind, zu entnehmen.
- **Einachsige Biegung mit Normalkraft.**  
Querschnitte : doppelt- oder einfach-symmetrische I-Profile, U- oder C-Profile.  
Einfache T-Querschnitte sind jedoch ausgeschlossen.  
Torsion ist ausgeschlossen.  
Die Lastfälle Biegung und Normalkraft sind zunächst getrennt zu behandeln, es gibt keine Traglastkurven für kombinierte Belastungen. Die Zusammenführung beider Lastfälle erfolgt über eine Interaktionsbedingung.

- **Zweiachsige Biegung mit oder ohne Normalkraft.**

Querschnitte : doppelt- oder einfach-symmetrische I-Profile.

Torsion ist ausgeschlossen, die Normalkraft muß konstant sein.

Die drei Lastfälle Biegung um die y- und z-Achse und Normalkraft sind getrennt zu behandeln. Das Moment  $M_z$  um die schwache Achse ist dabei nach Theorie I. Ordnung zu ermitteln, es ist auf  $M_{pl,z}$  zu beziehen und nicht auf ein Tragmoment um die schwache Achse. Allerdings wird über den Beiwert  $k_z$  der Einfluß einer Normalkraft auf  $M_z$  nach Theorie II. Ordnung berücksichtigt.

Eine Abminderung des Formbeiwertes  $\alpha_{pl}$  für  $M_{pl,z}$  ist in diesem Fall nicht erforderlich.




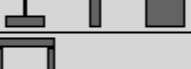





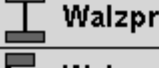


### 7.3 Kritische Lastgrößen

Es wird ein zur z-Achse symmetrischer Querschnitt vorausgesetzt. Eine Ausnahme liegt nur bei U- und C-Profilen vor, bei denen alle Lasten und Lagerreaktionen jedoch mit ihren Wirkungslinien durch den Schubmittelpunkt gehen müssen. Unter der kritischen Laststufe tritt Drillknicken oder Biegedrillknicken ein, der Träger verformt sich seitlich in y-Richtung und/oder verdrillt sich um die Stabachse x. Lasten rechtwinklig zur z-Achse bleiben bei der Ermittlung der kritischen Laststufe normalerweise unberücksichtigt, lediglich Horizontalkräfte können durch ihren Abstand  $e_y$  von der Drehachse die kritische Laststufe beeinflussen.. Torsionsbeanspruchungen sind jedoch grundsätzlich ausgeschlossen, in diesem Fall verliert das Ersatzstabverfahren seine Gültigkeit..

Die Lastfälle Biegung um die y-Achse und zentrische Normalkraft werden grundsätzlich getrennt untersucht. Für beide Lastfälle ermittelt man unabhängig voneinander die kritischen Laststufen und daraus über die maßgebenden Schlankheiten  $\lambda$  die zugehörigen Traglasten. Für kombinierte Belastungen lassen sich zwar die kritischen Lasten ermitteln, es fehlen aber die zugehörigen Traglastkurven.

Für die Biegebeanspruchung um die z-Achse (bei zweiachsiger Biegung) wird keine kritische Lastgröße ermittelt. Auch das Biegeknicken infolge Normalkraft um die y-Achse bleibt bei diesem Nachweis außer Betracht, Biegeknicken in der xz-Ebene ist gesondert nachzuweisen.

## 7.4 Interaktionsbedingungen

Profil		Lastfall N Gl.(3)	Lastfall My Gl.(16)	Lastfall N + My Gl.(27)	Lastfall N + My + Mz Gl.(30)
0	nicht festgelegt	● )*	● )**	● )* )**	● )***
1		●	●	●	●
2		●	●	●	●
3		●	● )**	● )* )**	
4		●	● )**	● )* )**	● )***
5		● )*	● )**	● )* )**	
6		● )*	● )**	● )* )**	
7		● )*	● )**	● )* )**	
8		● )*	● )**	● )* )**	
9		● )*	● )**	● )* )**	
10		● )*	● )**	● )* )**	● )***
11	 Walzprofil	●	●	●	●
12	 Walzprofil	●	●	●	

**Bild 1 - Ersatzstabverfahren**

### Legende:

**Schwarz** ausgefüllte Kreise signalisieren, daß das Ersatzstabverfahren normalerweise angewandt werden kann.

**Grau** ausgefüllte Kreise bedeuten, daß das Ersatzstabverfahren nur unter den folgenden Bedingungen und Annahmen genutzt werden kann:

- )\* Für diese Profiltypen wurde in DIN 18800-2, Tabelle 5, keine Knickspannungslinie angegeben, sie ist sinngemäß zu wählen. Unter dieser Voraussetzung kann das Ersatzstabverfahren bei einer Normalkraftbelastung genutzt werden.
- )\*\* Für diese Profiltypen fehlt in DIN 18800-2, Tabelle 9, ein Trägerbeiwert  $n$  zur Ermittlung des Abminderungsfaktors  $\kappa_M$ . Für eine Momentenbelastung  $M_y(x)$  kann das Ersatzstabverfahren daher nur dann genutzt werden, wenn ein Trägerbeiwert z.B. der Literatur entnommen werden kann.
- )\*\*\* Die Anwendung der Gl.(30) bei zweiachsiger Biegung ist ausdrücklich nur für einfach oder doppelt symmetrische Profile, die in ihren Abmessungen denen von Walzprofilen entsprechen, zugelassen. Für diese Profiltypen kann diese Bedingung jedoch ebenfalls zutreffen, in diesem Fall muß der Anwender die endgültige Entscheidung treffen.

Für die genannten vier Lastfälle gelten folgende Interaktionsbedingungen :

- **Planmäßig mittlerer Druck.**  
Tragsicherheitsnachweis nach 18800-2, Gl.(3).  
Der Abminderungsfaktor  $\kappa_z$  ist den europäischen Knickspannungskurven zu entnehmen [18800-2, Gleichungen (4) oder Bild 10], die Zuordnung des vorhandenen Profiles zur maßgebenden Kurve erfolgt nach Tabelle 5.
- **Einachsige Biegung ohne Normalkraft**  
Tragsicherheitsnachweis nach 18800-2, Gl.(16).  
Der Abminderungsfaktor  $\kappa_M$  ist für diesen Lastfall über Gl.(18) zu ermitteln, der Trägerbeiwert  $n$  für das vorgegebene Profil ist nach Tabelle 9 einzusetzen.
- **Einachsige Biegung mit Normalkraft**  
Tragsicherheitsnachweis nach 18800-2, Gl.(27).  
Die zwei Abminderungsfaktoren  $\kappa_z$  und  $\kappa_M$  sind wie oben beschrieben zu ermitteln.
- **Zweiachsige Biegung mit oder ohne Normalkraft**  
Tragsicherheitsnachweis nach 18800-2, Gl.(30).  
Der Anteil des Momentes  $M_z$  in dieser Gleichung wird additiv zur Gl.(27) hinzugenommen, es ist lediglich ein weiterer Beiwert  $k_z$  zu ermitteln.

Bild 1 zeigt eine Übersicht über die Anwendungsmöglichkeiten des Ersatzstabverfahrens, wobei insbesondere die Profiltypen berücksichtigt wurden.

Alle Nachweise nach dem Ersatzstabverfahren sind dem Verfahren elastisch-plastisch zuzuordnen, da in den Interaktionsformeln die vollplastischen Schnittgrößen eingesetzt werden. Daher ist beim Nachweis der Grenzwerte  $g_{\text{renz}}(b/t)$  Tabelle 15 in 18800-1 zu beachten.

Gegenüber dem Spannungsnachweis nach Theorie II. Ordnung (Verfahren elastisch-elastisch) führt das Ersatzstabverfahren in vielen Fällen auf günstigere Ergebnisse, da hier die vorgegebenen Lasten auf die Traglasten bezogen werden. Dagegen wird beim Verfahren elastisch-elastisch kein Plastizieren einbezogen, so dass - obwohl relativ kleine Vorverformungen anzusetzen sind - die Tragreserven des Trägers meist nicht ausgeschöpft werden. In solchen Fällen kann man über die Absicherung des Trägers gegen die Bildung des 1. Fließgelenkes höhere zulässige Lasten erzielen, wobei allerdings zu beachten ist, dass in DIN 18800-1 nur für doppelt symmetrische I-Profile die Interaktionsbeziehungen für den Nachweis eines Fließgelenkes unter der Einwirkung mehrerer Schnittgrößen vorgegeben sind.

# **Ausnutzung vorhandener Systemsteifigkeiten zur Erhöhung der Biegedrillknicksicherheit**

Referent:

**Rudolf Schneider  
SIS Ingenieursozietät GbR, Mainz**



## 1 Einleitung und Erläuterung des Problems

Es liegt in der Natur der Sache, daß der Mensch immer den Weg des geringsten Widerstandes einschlägt. So auch beim BDK-Nachweis. Man führt mit den, aus der DIN 18800 bekannten einfachen Formeln den Nachweis und vergleicht, ob ausreichende Tragsicherheit vorhanden ist. Ist dies der Fall, kümmert man sich nicht weiter darum, ob das System noch Reserven enthält, die die BDK-Sicherheit anheben.

Ist dies jedoch nicht der Fall, ist man gezwungen genauer zu rechnen. Spätestens dann beginnt man darüber nachzudenken, welche Systemreserven man aktivieren und in die Rechnung mit einbeziehen kann.

Zugegeben, für Handrechnungen gibt es nicht viele Möglichkeiten, vorhandene Systemsteifigkeiten für die Erhöhung der BDK-Sicherheit rechnerisch auszuwerten.

Auf die wenigen, die es gibt, soll in diesem Vortrag hingewiesen werden. Mit verschiedenen Beispielrechnungen werden die verschiedenen Möglichkeiten und ihre Auswirkungen untereinander verglichen.

In den Fällen, wo diese Möglichkeiten nicht mehr zum gewünschten Ziele führen, kann man durch ein Computerprogramm, das nicht auf den Formeln der DIN beruht, sondern das Problem mit einer geeigneten mathematischen Methode angeht, vorhandene Systemsteifigkeiten besser ausnutzen und oft noch ausreichende Tragsicherheit nachweisen. Auch dazu werden in diesem Vortrag ein paar Hinweise geben.

## 2 Lösungsvorschläge und Methoden

Die BDK-Sicherheit kann man erhöhen, wenn man alle zur Verfügung stehenden Systemreserven aktiviert. Das bedeutet:

1. Erfassung aller vorhandenen Schubsteifigkeiten
2. Erfassung aller vorhandenen Drehfedersteifigkeiten
3. Erfassung aller vorhandenen Wölbfedersteifigkeiten

Man muß hier wieder zwischen den Möglichkeiten einer Handrechnung und einem Nachweis mit einem geeigneten Computerprogramm unterscheiden.

Zum Beispiel lassen sich bei einer Handrechnung vorhandene Schubsteifigkeiten nur dann nutzen, wenn bei Trägern, die durch positive und negative Moment beansprucht werden (Durchlaufträger, Rahmenriegel usw.), die Bedingung (7) der DIN 18800/2 eingehalten ist.

$$S_{erf} \geq \left( E * I_w * \frac{p^2}{L^2} + G * I_t + E * I_z * \frac{p^2}{L^2} * 0.25 * h^2 \right) * \frac{70}{h^2} \quad (7)$$

Ist diese Bedingung eingehalten, dann liegt nach DIN 18800/2 eine „gebundene Drehachse“ vor. „Gebundene Drehachse“ bedeutet, daß der Träger zum Beispiel durch eine Trapezblecheindeckung am Obergurt als seitlich unverschieblich angesehen werden kann.

Zusätzlich gibt es für die Profile IPE200, IPE240, IPE300 und IPE360 bei einer Handrechnung noch die Möglichkeit, auch dann noch eine **vorhandene** Schubfeldsteifigkeit auszunutzen, wenn sie unter dem Wert der Bedingung (7) liegt. Von Lindner wurde im [3] dazu ein Bild veröffentlicht, das auf folgender Seite wiedergegeben wird.

Bei Balken auf zwei Stützen (Obergurt durchgehend auf Druck beansprucht) reduziert sich die Bedingung (7) auf den Wert:

$$S_{1erf} \geq 10.2 * M_{pl,k} / h \quad \text{siehe [2] Gleichung (2-3.12)}$$

Bei Einhaltung dieses Wertes sind keine weiteren Nachweise erforderlich.

In allen anderen Fällen lassen sich **vorhandene** Schubsteifigkeiten, die unter den vorge-nannten Werten liegen, nur mit einem genaueren Nachweis berücksichtigen.

Ferner lassen sich bei einer Handrechnung vorhandene Wölbfedern nur dann berücksichtigen, wenn sie in gleicher Größe an beiden Stabenden angebracht sind. Zwischendurch angebrachte Wölbfedern lassen sich ebenfalls nur mit Hilfe eines geeigneten Programms erfassen.

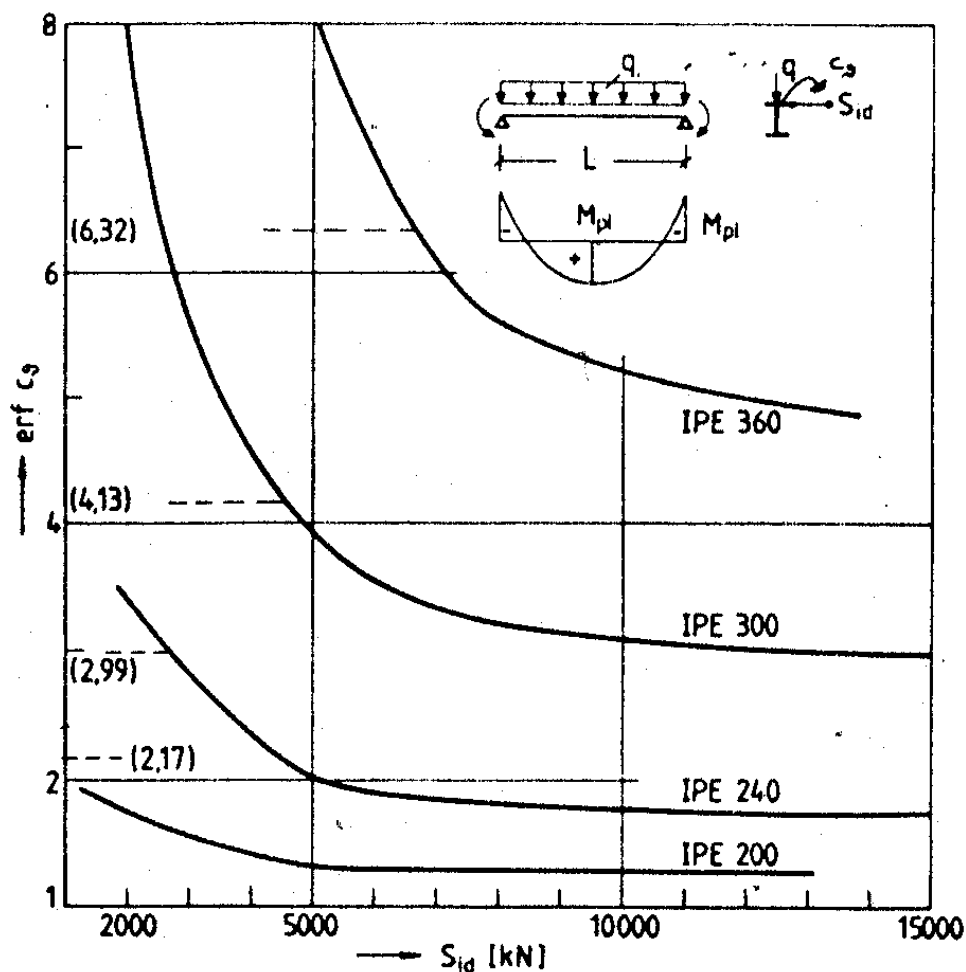


Abbildung 1: Erforderliche Drehfedersteifigkeiten in Abhängigkeit von der vorhandenen Schubsteifigkeit nach Lindner [3]

## 2.1 Erfassung vorhandener Schubsteifigkeiten

Um für einen Träger eine gebundene Drehachse zu erzielen, sind nach [ 1 ] bzw. [ 2 ] gewisse Mindestschubsteifigkeiten vorgeschrieben.

Wenn jedoch die Bedingung (7) nach [1] nicht erfüllt ist, gibt es nach [1] **keine** Möglichkeit, die vorhandene Schubsteifigkeit, die **unter** dem Wert nach Bedingung (7) liegt, in irgendeiner Form bei BDK-Nachweisen, die mittels Handrechnung durchgeführt werden, zu berücksichtigen. Um vorhandene Schubsteifigkeiten zu nutzen, muß man einen genaueren Nachweise führen. Dieser ist mit einem guten Programm möglich.

Vorhandene Schubsteifigkeiten - gleich welcher Größe - werden beispielsweise vom Programm **Drill** (Prof. Dr.-Ing. Friemann, Seeheim [6]) berücksichtigt. Dieses Programm ist ausgezeichnet dafür geeignet, alle vorhandenen Drehfedern, Schubsteifigkeiten und Wölbefedern zu erfassen. An den einzelnen Knoten lassen sich praktisch alle denkbaren Lagerungsbedingungen simulieren.

Wenn man mit [1] am Ende der Möglichkeiten angelangt ist, läßt sich mit diesem Programm oft noch ein BDK-Nachweis führen. Auch wenn nur eine Schubsteifigkeit allein vorhanden ist oder Wölbefedern allein vorhanden sind, läßt sich mit diesem Programm ein BDK-Nachweis führen.

Bei Handrechnung habe ich daher nach [1] nur zwei Möglichkeiten:

1. vorhandene Schubsteifigkeit erfüllt die Bedingung (7) → gebundene Drehachse liegt vor
2. vorhandene Schubsteifigkeit erfüllt die Bedingung (7) nicht → keine gebundene Drehachse liegt vor, die vorhandene Schubsteifigkeit kann ich **nicht** nutzen.

In beiden Fällen ist zusätzlich der Nachweis einer ausreichenden Drehbettung nach [1] Bedingung (8) erforderlich. Liegt gebundene Drehachse vor, wird  $C_{\vartheta,k,erf}$  wesentlich kleiner, da der Beiwert  $k_{\vartheta}$  nach [1], Tabelle 6, ebenfalls wesentlich kleiner wird.

Die vorhandene Schubsteifigkeit besteht aus einer Trapezblecheindeckung oder aus einer Trapezblecheindeckung + Verbandswirkung. Die Ermittlung einer Schubsteifigkeit für andere Dacheindeckungen (Holz, Wellasbest usw) ist nicht möglich, da dafür noch keine Versuchsergebnisse vorliegen. Lediglich für Trapezbleche aus Aluminium ist die Ermittlung einer Schubsteifigkeit nach [7] Seite 175-179 noch möglich.

Die erforderliche Schubsteifigkeit nach Bedingung (7) ist für alle Stäbe erforderlich, die negative und positive Moment erhalten (Durchlaufträger, Rahmenriegel usw). Handelt es sich dagegen um einen Träger auf zwei Stützen (Obergurt durchgehend auf Druck beansprucht), ist die erforderliche Schubsteifigkeit kleiner. Sie ist dann nach [2], Seite 170, Gl. (2-3.12) zu ermitteln.

**Die erforderliche Schubsteifigkeit nach Bedingung ( 7 ) ermittelt sich wie folgt:**

$$S_{vorh} = S_{Trapez} + S_{Verband} \geq S_{erf} = \left( E * I_w * \frac{p^2}{L^2} + G * I_t + E * I_z * \frac{p^2}{L^2} * 0.25 * h^2 \right) * \frac{70}{h^2} \quad (7)$$

h = Trägerhöhe, L = Stützweite

Vorgenannte Gleichung setzt voraus, daß die Eindeckung als Schubfeld ausgebildet ist. Das heißt, durchgehende Befestigung der Längsränder und Befestigung in jeder Rippe.

Wird nur jede zweite Rippe befestigt, darf S nur mit einem Fünftel des ermittelten Wertes in Rechnung gestellt werden

$$\rightarrow S'_{vorh} = 0.2 * S_{vorh}$$

In diesem Falle ist es **nicht** erforderlich, das Trapezblech entlang der Ränder zu befestigen (siehe [ 2 ], Seite 165).

Für Fälle ohne Querlast darf die Zahl 70 durch die Zahl 20 ersetzt werden.

**Die erforderliche Schubsteifigkeit nach [2], Seite 170, Gl. (2-3.12) ermittelt sich wie folgt:**

$$S_{1erf} \geq 10.2 * M_{pl,k} / h$$

Ist diese erreicht, ist ein Biegedrillknicknachweis nicht erforderlich.

**Die vorhandene Schubsteifigkeit eines Trapezbleches ermittelt sich wie folgt:**

$$G_s = \frac{10^4}{K_1 + 100K_2/L_s} \quad \text{in kN/m}$$

mit den Schubfeldwerten  $K_1$  in m/kN und  $K_2$  in m<sup>2</sup>/kN nach Trapezblechzulassung.

$L_s$  ist die Schubfeldlänge in cm,  $a$  ist der Binderabstand in cm.

Auf einen Binder entfällt dann die Schubsteifigkeit

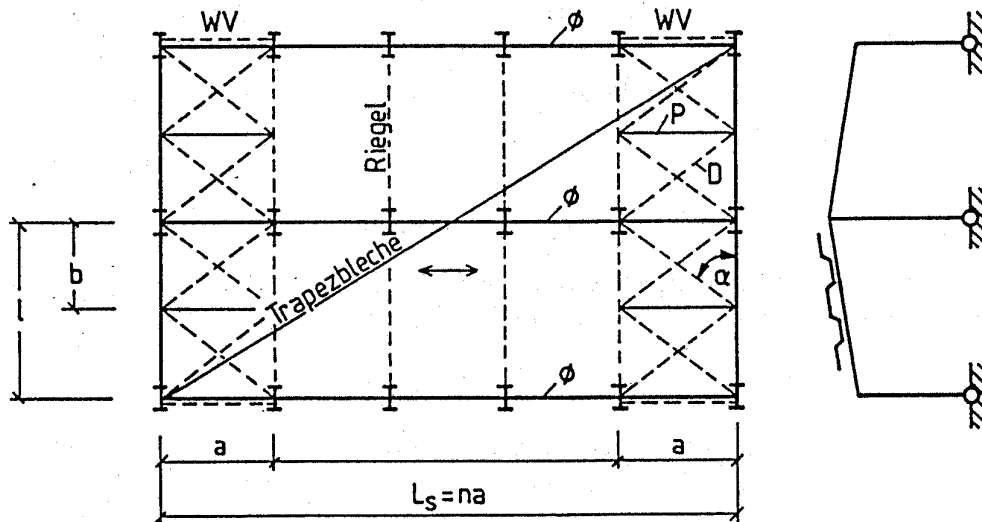
$$S_{Trapez} = \frac{a}{100} G_s \quad \text{in kN}$$

**Die vorhandene Schubsteifigkeit eines Verbandes ermittelt sich wie folgt:**

$$S_{Verband} = \frac{1}{1/E * A_d * \sin^2 a * \cos a + 1/E * A_p * \cot a}$$

Mit  $S_V$  in [kN],  $A_d$  Fläche der Diagonalen in [cm<sup>2</sup>],  $A_p$  Fläche der Pfosten in [cm<sup>2</sup>],  $\alpha$  Winkel zwischen Diagonale und Riegel,  $b$  Abstand der Pfosten in [cm]

Bei Kreuzverbänden werden nur die Zugdiagonalen berücksichtigt. Sind Pfosten und Diagonalen verschiedener Querschnitte vorhanden, werden nur die minimalen Querschnittsflächen berücksichtigt.



**Abbildung 2: Schubsteifigkeiten eines Verbandes**

Vorgenannte Gleichung lässt sich noch umstellen zu

$$S_{\text{Verband}} = \frac{a^2 * b * E}{(\sqrt{a^2 + b^2})^3 / A_d + a^3 / A_p}$$

Damit lässt sich die nur aus den Verbänden auf einen Riegel entfallende Schubsteifigkeit berechnen zu:

$$S_{\text{Riegel}} = m * a * S_{\text{Verband}} / L_s$$

wobei m die Anzahl der aussteifenden Verbände ist.

Die vorhandene Schubsteifigkeit aus Trapezblech und Verband ergibt sich daher wie folgt:

### **Befestigung in jeder Sicke**

$${}_{\text{vorh}} S = S_{\text{Trapez}} + S_{\text{Riegel}}$$

### **Befestigung in jeder zweiten Sicke**

$${}_{\text{vorh}} S = 0.2 * S_{\text{Trapez}} + S_{\text{Riegel}}$$

## 2.2 Erfassung vorhandener Drehfedersteifigkeiten

$$C_{\vartheta,k,erf} \geq (M_{pl,k}^2 * k_{\vartheta} * k_v) : (E * J_{z,k}) \quad \text{nach [1], Gleichung (8)}$$

$k_{\vartheta}$  = nach [1], Tabelle 6

$k_v$  = 1.00 bei Verfahren elastisch-plastisch und plastisch-plastisch  
= 0.35 bei Verfahren elastisch-elastisch

$C_{\vartheta,k,erf}$  darf wie folgt reduziert werden:

Falls die Beanspruchung unter den  $\gamma_{M-fachen}$  Bemessungswerten kleiner ist als das Fließmoment  $M_{el,y,max} \leq f_{y,k} * W$  (elastisch-elastisch), dann ergibt sich

$$C_{\vartheta,k,erf} \geq [ (M_{pl,k}^2 * k_{\vartheta} * 0.35) : (E * J_{z,k}) ] * (M_{vorh} / M_{el,y,max})^2$$

(Reduktion nach [2], Seite 166)

ist unter den  $\gamma_{M-fachen}$  Bemessungswerten  $M_{vorh} \leq M_{pl,k}$  aber  $> M_{el,y,max}$  (elastisch-plastisch), dann ergibt sich

$$C_{\vartheta,k,erf} \geq [ (M_{pl,k}^2 * k_{\vartheta} * 1.00) : (E * J_{z,k}) ] * (M_{vorh} / M_{pl,y,k})^2$$

(Reduktion nach [2], Seite 166)

$$C_{\vartheta,k,vorh} = 1 : ( 1 / C_{\vartheta M,k} + 1 / C_{\vartheta P,k} + 1 / C_{\vartheta A,k} ) \quad \text{nach [1], Gleichung (9)}$$

$$C_{\vartheta M,k} = k * E * J / a \quad \text{(in kNm/m)} \quad \text{nach [1], Gleichung 10}$$

Mit  $k = 2$  für Einfeld- und Zweifeldträger

$k = 4$  für Durchlaufträger mit 3 und mehr Feldern

$J$  = Trägheitsmoment der Eindeckung

$A$  = Stützweite der Dacheindeckung

$$C_{\vartheta P,k} = \text{in kNm/m} \quad \text{nach [2], Tabelle 2-3.2}$$

Die Anschlußdrehfedersteifigkeit  $C_{\vartheta A,k}$  nach [1], Tabelle 7 muß bei Trapezblecheindeckung, welches direkt auf dem Obergurt aufliegt, immer berücksichtigt werden. Sie läßt sich jedoch nach [2], Seite 169, wie folgt erhöhen

$$C_{\vartheta A,k} = C'_{\vartheta A,k} * k_b * k_t * k_A \quad \text{nach [2], Seite 169}$$

$C'_{\vartheta A,k}$  nach [1], Tabelle 7

$$k_b = (vorh \ b / 100)^2 \quad \text{für } vorh \ b / 100 \leq 1.25 \quad \text{mit } b \text{ in mm}$$

$$k_b = 1.25 * vorh \ b / 100 \quad \text{für } 1.25 < vorh \ b / 100 \leq 2.00$$

$$k_t = (t / 0.75)^{1.1} \quad \text{bei Positivlage} \quad \text{mit } t \text{ in mm}$$

$$k_t = (t / 0.75)^{1.5} \quad \text{bei Negativlage}$$

$$A = \gamma_M * (G * \gamma_F + P * \gamma_F) * L \leq 12.00 \text{ kN/m}$$

$$k_A = 1.0 + (A - 1) * 0.08 \quad \text{bei } t = 0.75 \text{ mm Positivlage}$$

$$k_A = 1.0 + (A - 1) * 0.16 \quad \text{bei } t = 0.75 \text{ mm Negativlage}$$

$$k_A = 1.0 + (A - 1) * 0.095 \quad \text{bei } t = 1.00 \text{ mm Positivlage und Negativlage}$$

Wird der zu untersuchende Träger durch Stahlpfetten belastet, ist die Anschlußdrehfedersteifigkeit  $C'_{\vartheta A,k}$  nicht mehr zu berücksichtigen. In diesem Falle geht man davon aus, daß der Schraubenanschluß der Pfetten keinen Schlupf zuläßt.

Außerdem kann bei den Fällen, bei denen das „Kontaktmoment“  $m_k = q_T \cdot \frac{b}{2}$  [kNcm/cm] größer

ist, als das zu übertragende Moment  $m_J = 0.05 \cdot \frac{M_{pl}^2}{EI_z}$  [kNcm/cm],

auf die Anschlußdrehfedersteifigkeit verzichtet werden. Das ist bei Stahlpfetten praktisch immer der Fall und ist auch bei entsprechender schlupfarmer Anschlußausbildung bei Holzpfetten denkbar.

Bei Belastung durch Pfetten ist es erlaubt, die Momentendrehfedersteifigkeit  $C_{\partial M,k}$  und die mitwirkende Profildrehfedersteifigkeit  $C'_{\partial P,k}$  auf die Länge des Abstands der Pfetten zu verschmieren (diskrete Drehfedersteifigkeit).

Dabei ist jedoch daran zu denken, daß die Profildrehfedersteifigkeit  $C_{\partial P,k}$  [kNm/m] für den am Obergurt angeschlossenen Träger gilt. Als mitwirkende Länge für die Profildrehfedersteifigkeit sollte daher nicht mehr als die Pfettenbreite (b) + Trägerhöhe ( $T_h$ ) angesetzt werden.

vorh  $C'_{\partial P,k} = C_{\partial P,k} \cdot (b + T_h)$ .

Greifen die Pfetten im Steg an, läßt sich  $C'_{\partial P,k}$  noch wie folgt erhöhen (siehe [2], Seite 213 + 214)

$C''_{\partial P,k} = C'_{\partial P,k} \cdot \frac{T_h^3}{x^3 + y^3}$  mit  $T_h$  = Trägerhöhe,

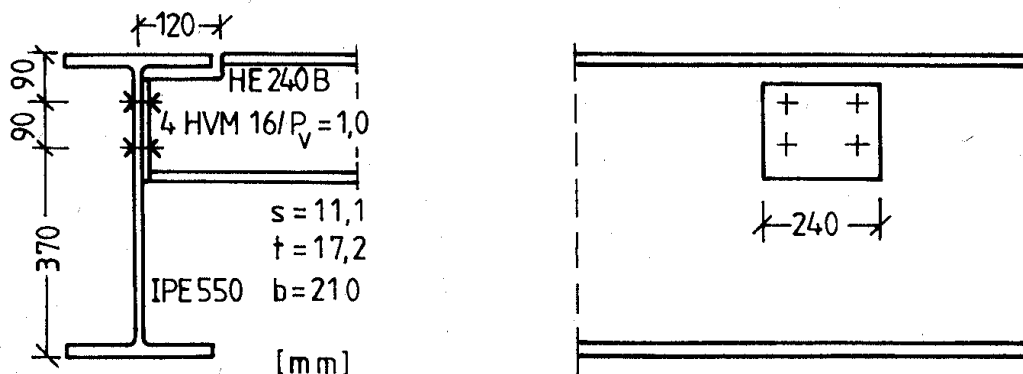
x = Abstand vom Untergurt bis zur ersten Schraube

y = Abstand der Anschlußschrauben

### Beispiel:

vorh  $C'_{\partial P,k} = 141 \cdot (0.24 + 0.55) = 111$  kNm

$C''_{\partial P,k} = 111 \cdot \frac{55^3}{37^3 + 9^3} = 359$  kNm



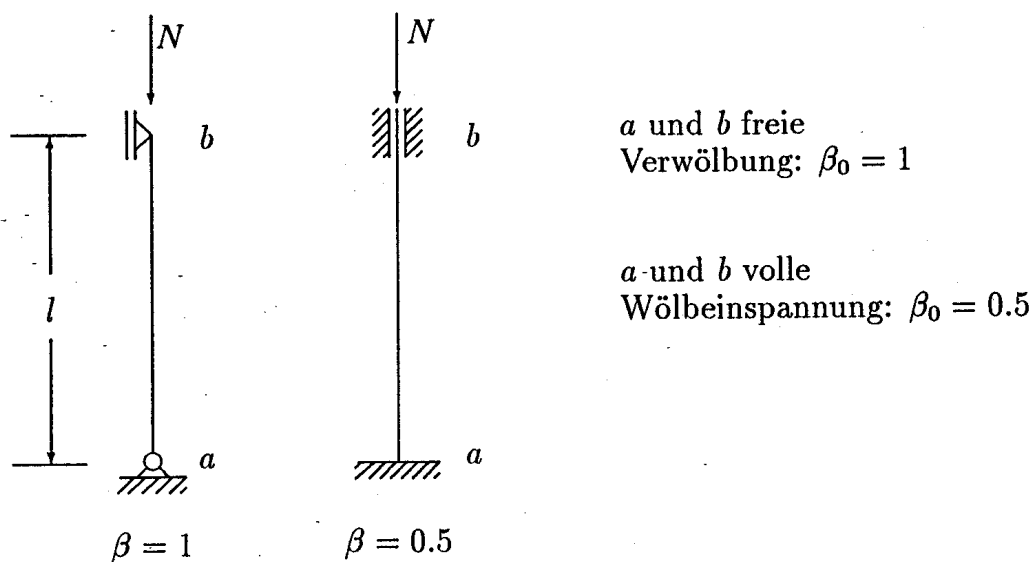
**Abbildung 3: Ermittlung der Profildrehfedersteifigkeit**

### 2.3 Erfassung vorhandener Wölbfedern

In DIN 18800 und auch im Kommentar sind keine Hinweise enthalten, wie Wölbfedern berücksichtigt werden können. Wölbfedern lassen sich aber mit dem Programm **Drill** an jeder beliebigen Stelle erfassen. Wölbfedern haben Einfluß auf den ideellen Schlankheitsgrad  $I_{vi}$ , mit dessen Hilfe die kritische Normalkraft  $N_{ki}$  unter der kleinsten Verzweigungslast ermittelt wird.

$$N_{ki} = \frac{EJ_z * p^2}{I_{vi}^2 * i_z^2}$$

Für Stäbe mit freier Drillachse und ohne Drehfedern, deren Stabenden a und b gleich gelagert sind, gilt folgendes Bild:



**Abbildung 4: Einspannungsgrad**

$b$  = Faktor für den Grad der Biegeinspannung (quer zur Stegebene)

$b = 0.5$  starre Einspannung an beiden Stabenden

$b = 1.0$  gelenkige Lagerung an beiden Stabenden

$b_0$  Faktor für den Grad der Wölbeinspannung

$b_0 = 0.5$  starre Wölbeinspannung an beiden Stabenden

$b_0 = 1.0$  Endstirnflächen des Stabes können sich in Richtung der Stabachse frei verschieben (verwölben)

Für  $b = b_0 = 1.0$  liegt eine Gabellagerung beider Stabenden vor (siehe DIN 4114, Ri 7.522)

$I_{vi}$  wiederum ist abhängig von  $b$  und  $b_0$ :

$$I_{vi}^2 = \left(\frac{b * l}{i_z}\right)^2 * \frac{c^2 + i_M^2}{2c^2} * \left\{1 + \sqrt{1 - \frac{4c^2 [i_p^2 + 0.093(b^2 / b_0^2 - 1)z_M^2]}{[c^2 + i_M^2]^2}}\right\}$$

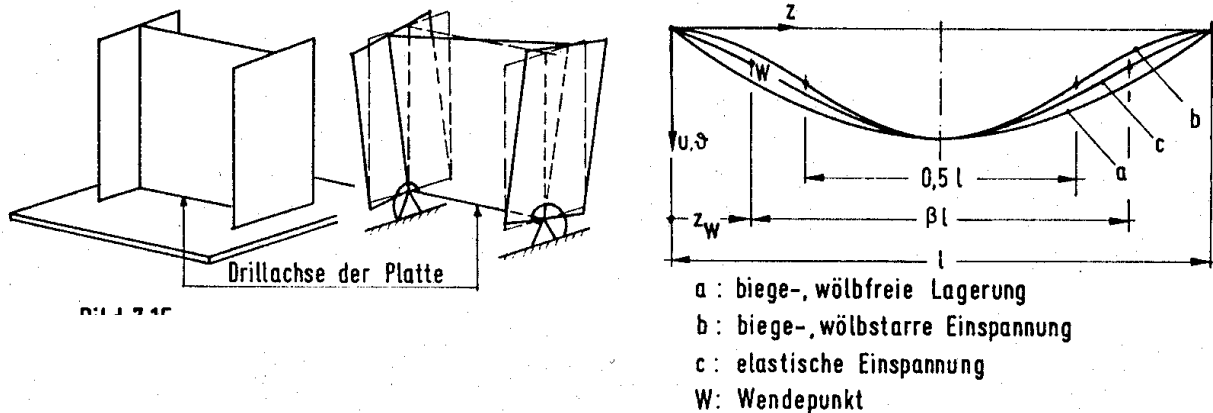
mit dem sogenannten Drehradius

$$c^2 = \left(\frac{b \cdot l}{b_0 \cdot l_0}\right)^2 \cdot \frac{J_w}{J_z} + \left(\frac{b \cdot l}{p}\right)^2 \cdot \frac{GJ_T}{EJ_z}$$

Durch Anbringung von Stirnplatten an beiden Stabenden entsteht eine elastische Wölbbehinderung. Der durch die Stirnplatten erzeugte Wölbwiderstand kann als Wölbfeder idealisiert werden.

Wenn die Größe der Wölbfedern bekannt ist, läßt sich daraus der Wert  $b_0$  iterativ mittels der folgenden Gleichung ermitteln

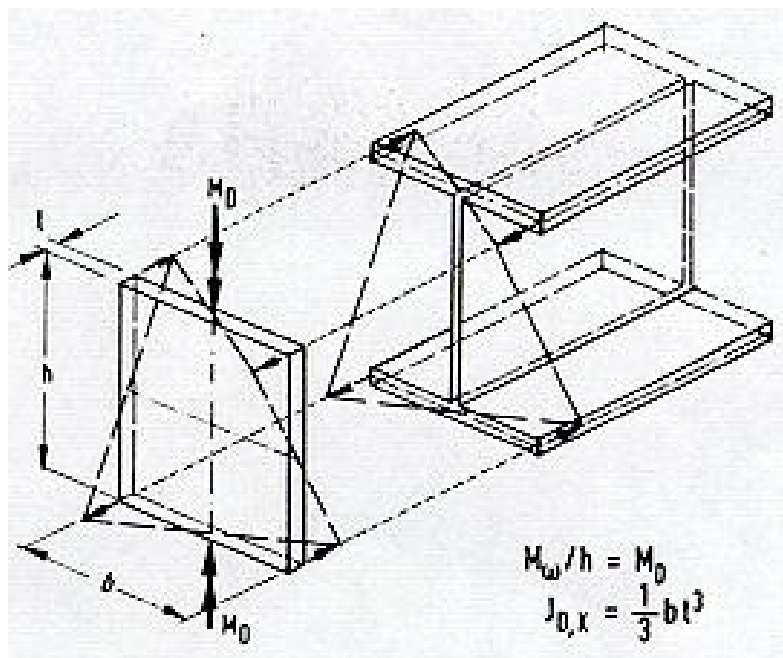
$$\frac{K_w \cdot l}{2 \cdot p \cdot E \cdot J_w} = \frac{\sin\left[\frac{p}{2}(1 - b_0)\right]}{2 \cdot \cos[p(1 - b_0)]} \quad \text{daraus folgt dann } b_0 \text{ iterativ} \quad K_w = \text{Wölbfeder}$$



**Abbildung 5: Wölbeinspannung**

Die Wölbfeder einer Stirnplatte ermittelt sich wie folgt:

$$K_w = h \cdot G \cdot J_{D,K} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot b \cdot h \cdot t^3$$

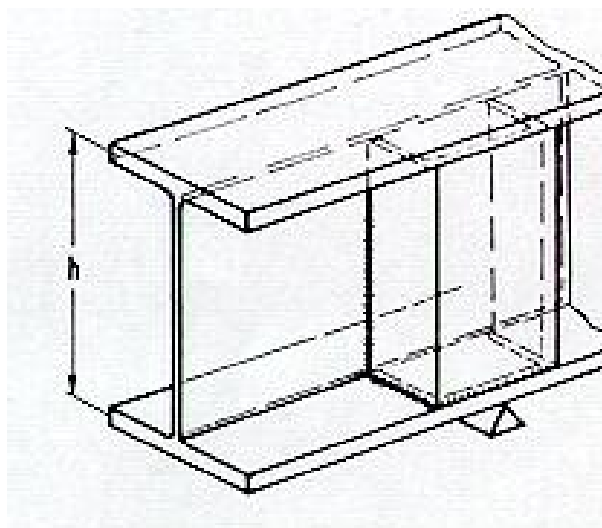


**Abbildung 6: Berechnung von Wölbfedern**

Effektiver als Kopfplatten ist der Einbau drillsteifer Querschotte in Form von eingeschweißten U- oder Winkelprofilen. Nachfolgende Bilder zeigen eine solche Maßnahme. Um die Hochachse entsteht ein geschlossener Kastenquerschnitt. Die Länge dieses Kastens ist gleich der Trägerhöhe. Ist  $F^*$  die von der Mittellinie umschlossene Fläche, beträgt der Drillwiderstand:

$$J_{D,K} = \frac{4F^{*2}}{\sum \frac{s_i}{t_i}}$$

Daraus ergibt sich die Wölbfederkonstante zu  $K_w = hGJ_{D,K} = hG * \frac{4F^{*2}}{\sum \frac{s_i}{t_i}}$

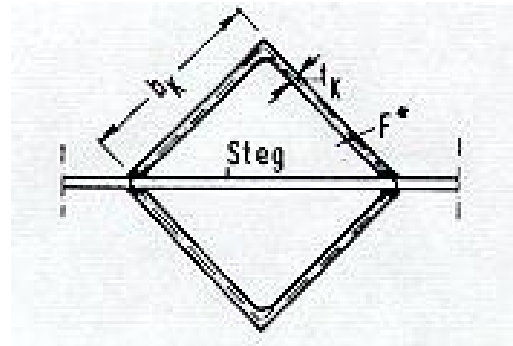


**Abbildung 7: Wölbfedersteifigkeiten**

Wird die Wölbfeder beispielsweise aus zwei gleichschenkligen Winkeln der Breite  $b_k$  und der Wanddicke  $t_k$  hergestellt, so ergibt sich

$$J_{D,K} = \frac{4b_k^4}{4 \frac{b_k}{t_k}} = t_k b_k^3$$

$$\text{und } K_W = hGt_k b_k^3$$



## 2.4 Bemerkungen zur Gabellagerung

Die Nachweise für Biegedrillknicken nach den Gleichungen (16), (27) und (30) der DIN 18800/2 werden am sogenannten Ersatzstab durchgeführt. Dies ist ein Stababschnitt, der aus dem System herausgeschnitten wird. Logischerweise muß dieser Stab an den Stabenden mit den Schnittkräften belastet werden, die im System herrschen.

Die Nachweise nach vorgenannten Gleichungen setzen aber eine Gabellagerung beider Stabenden voraus! Das wird oft übersehen.

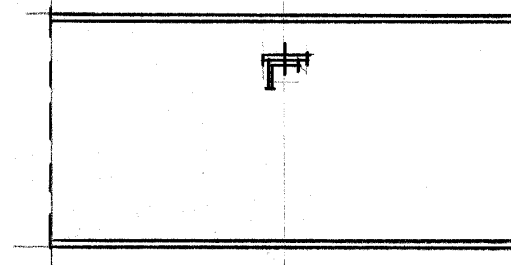
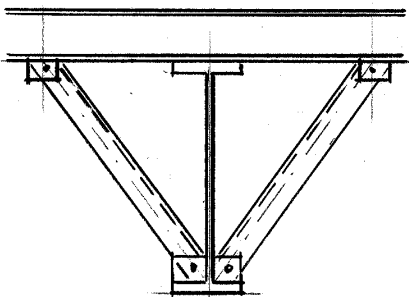
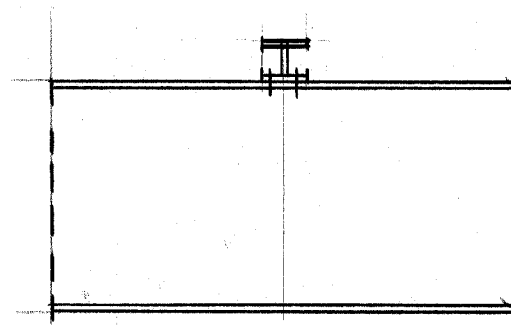
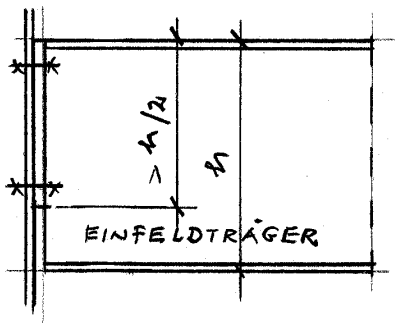
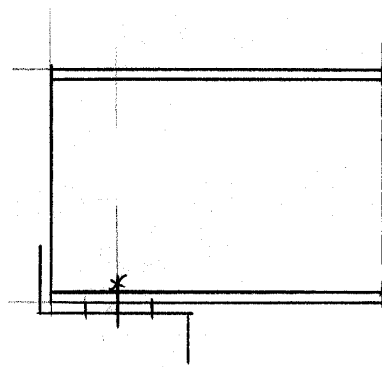
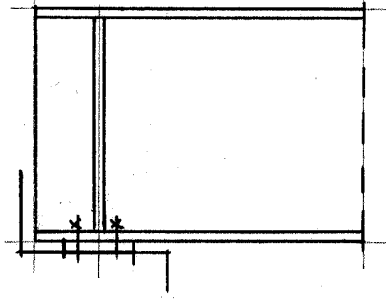
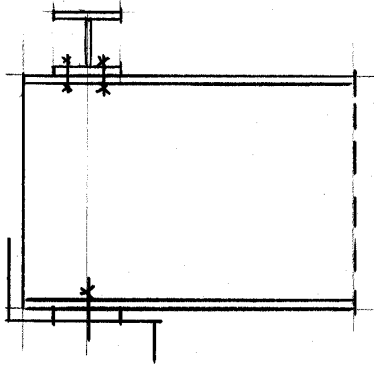
Nach meiner Erfahrung, die ich im Laufe meiner Tätigkeit als Prüfenieur gemacht habe, geschieht das sehr häufig. Es wird der Nachweis unter der Annahme beidseitiger Gabellagerung geführt, obwohl diese oder zumindest eine gleichwertige nicht immer vorhanden ist.

Was ist also eine Gabellagerung? Gabellagerung bedeutet, daß an dieser Stelle eine Verdrehung des Querschnitts nicht auftreten darf und ein Torsionsmoment aufgenommen werden kann.

In [2], Seite 175 wird dazu folgendes gesagt: „Durch die konstruktive Ausführung ist sicherzustellen, daß dies (die Gabellagerung) erreicht wird.“

Auf folgender Seite ist anhand einiger Beispiele dargestellt, welche Ausführung man als Gabellager ansehen kann bzw. welche Ausführung nicht dieser Anforderung entspricht.

Die linke Seite zeigt Lagerungen, die einer Gabellagerung entsprechen, die Darstellungen auf der rechten Seite dagegen kann man nicht als Gabellagerung ansehen.

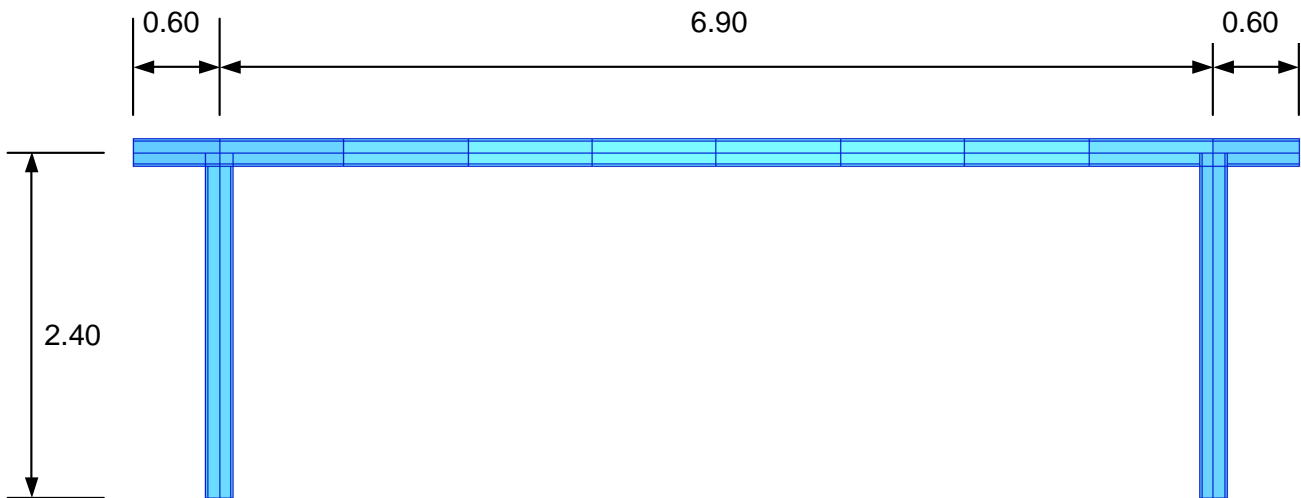


Stützung mit Drehfeder

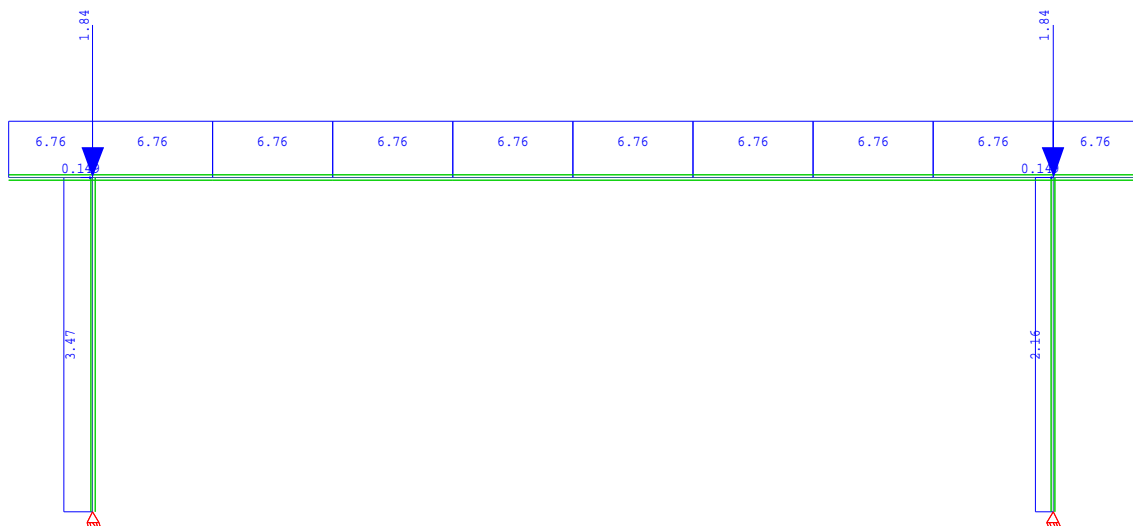
### 3 Beispiele

Auf den kommenden Seiten sind Handrechnungen und Ergebnissausdrücke vom Programm **Drill** dargestellt. Zur Übersicht sind hier die Inhalte der Beispiele zusammengefasst:

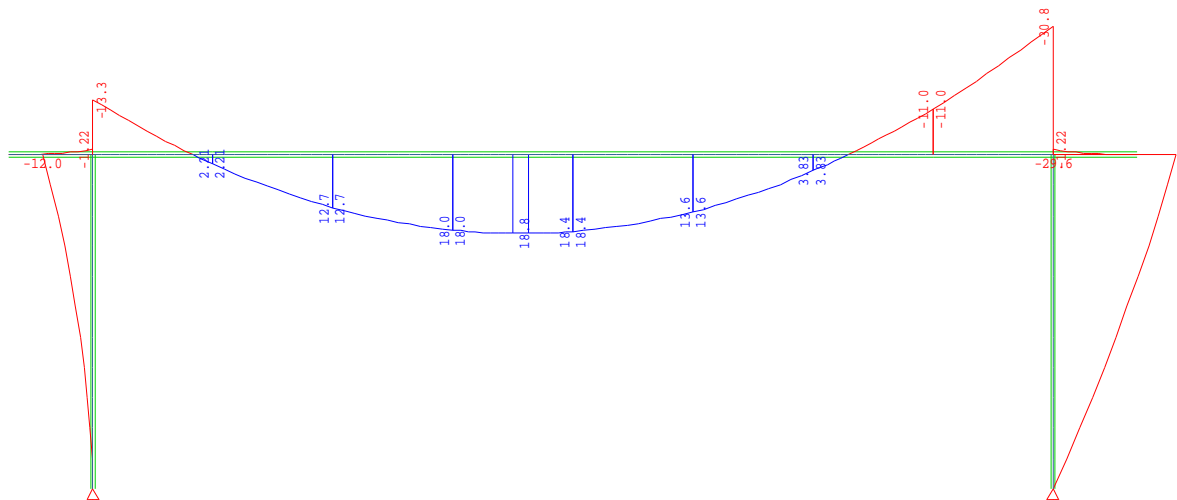
- Beispiel 1: Handrechnung für einen Rahmenriegel mit Trapezblecheindeckung Befestigung in jeder Sicke. Freie Drillachse (kein Schubfeld), nur Drehfeder aus Blech berücksichtigt. Überprüfung, ob Bedingung (8) erfüllt ist
- Beispiel 2: Wie Beispiel 1, jedoch Befestigung nur in jeder 2. Sicke. Zusätzlich Ermittlung der vorhandenen Schubfeldsteifigkeit und Überprüfung ob Bedingung (7) erfüllt ist. Ermittelte Tragsicherheit =  $0.956 < 1$
- Beispiel 3: Wie Beispiel 2, jedoch mit Programm „Drill“ gerechnet. Ergebnis  $\Rightarrow$  **Drill** ermittelt größere Sicherheit  $\Rightarrow 0.758 < 1$
- Beispiel 4: Wie Beispiel 3, jedoch zusätzlich die vorhandene Schubsteifigkeit 2095 kN/m mit angesetzt. Ermittelte Tragsicherheit =  $0.654 < 1$
- Beispiel 5: Nur Schubsteifigkeit 2095 kN/m ( $< 10.2 * M_{pl,k} / h$ ) angesetzt um nachzuprüfen, ob vorhandene Schubsteifigkeit allein ausreicht, um den BDK-Nachweis zu erfüllen. Ergebnis  $\Rightarrow$  die angesetzte Schubsteifigkeit bei Anschluß in jeder 2. Sicke reicht aus, um die Biegedrillknicksicherheit zu gewährleisten. Ermittelte Tragsicherheit =  $0.703 < 1$
- Beispiel 6: Beispiel aus [4], Seite 755 mit Programm „Drill“ für zweiachsige Biegung und Torsion nach Theorie II. Ordnung nachgewiesen. Ergebnis mit **Drill**:  $\sigma_{max} = 23.548 \text{ kN/cm}^2$ , Petersen  $\sigma_{max} = 22.55 \text{ bzw } 23.01 \text{ kN/cm}^2$
- Beispiel 7: Derselbe Träger wie bei den Beispielen 1 bis 5, in vier gleiche Abschnitte unterteilt und nur durch Wölbfedern an den Knoten ausgesteift. Ermittelte Tragsicherheit =  $0.889 < 1$
- Beispiel 8: Derselbe Träger wie in Beispiel 5 als Einfeldträger ausgebildet, gabelgelagert, im Feld voll durchplastiziert, mit Schubfeld  $10.2 * M_{pl,k} / h$
- Beispiel 9: Wie Beispiel 8, jedoch beidseits eingespannt, mit Schubfeld 12022 kN/m nach Bedingung (7) und Drehfeder 2.17 kNm/m nach Bedingung (8)
- Beispiel 10: Wie Beispiel 9, jedoch Drehfeder weggelassen um deren Einfluß festzustellen
- Beispiel 11: Wie Beispiel 9, jedoch Schubfeld auf  $10.2 * M_{pl,k} / h$  herabgesetzt, um dessen Einfluß festzustellen



**Abbildung 8: Systemmaße für Beispiel 1 bis 5**



**Abbildung 9: Belastungen**



**Abbildung 10: Momentenverlauf**

## Beispiel 1

**Rahmenriegel mit Trapezblecheindeckung, freie Drillachse, nur Drehfederkonstante der Eindeckung berücksichtigt. Überprüfung, ob Bedingung (8) erfüllt ist**

Profil IPE 200,  $\rightarrow W_y = 194 \text{ cm}^3$   $J_{z,k} = 142 \text{ cm}^4$   $_{\text{vorh}} b = 100 \text{ mm}$ ,  $M_{pl,k} = 53.00 \text{ kNm}$   
 Dacheindeckung aus Trapezblechen E 95 / 075 mit  $J_{\text{eff}} = 143 \text{ cm}^4/\text{m}$   
 als Zweifeldträger mit  $L = 4.02 \text{ m}$   
 Daraus ermittelte Auflagerkräfte infolge  $G = 1.46 \text{ kN/m}$  infolge  $P = 3.55 \text{ kN/m}$

Größtes Biegemoment =  $-30.84 \text{ kNm}$  im Lastfall 11 unter 1.35-facher Last (Eckmoment)  
 $M_{el,y,\text{max}} = 194 * 24 / 100 = 46.56 \text{ kNm}$   
 $M_{el,y,\text{vorh}} = 30.84 * 1.10 = 33.92 \text{ kNm} < 46.56 \rightarrow$  elastisch-elastisch,  $k_v = 0.35$   
 Momentenverlauf nach Bild 2b, Tabelle 6,  $k_{\vartheta} = 3.5$

$$C_{J,k,\text{erf}} \geq [ M_{pl,k}^2 * k_{\vartheta} * k_v * (M_{el,y,\text{vorh}} / M_{el,y,\text{max}})^2 ] : ( E * J_{z,k} ) =$$

$$= [ 5300^2 * 3.5 * 0.35 * ( 33.92 / 46.56 )^2 ] : ( 21000 * 142 ) =$$

$$= 11.54 * 0.73^2 = \mathbf{6.12 \text{ kNm/m}}$$

$$C_{\vartheta M,k} = k * E * J / a = 2 * 21000 * 143 / ( 402 * 100 ) = 149.40 \text{ kNm/m}$$

$$C_{\vartheta P,k} = 49.20 \text{ kNm/m}$$

$$C_{\vartheta A,k} = C'_{\vartheta A,k} * k_b * k_t * k_A$$

### Bleche in jeder Sicke befestigt

$$\rightarrow C'_{\vartheta A,k} = 5.20 \quad \text{Trapezblech E 96 / 0.75, Positivlage}$$

$$k_b = ( 100 / 100 )^2 = 1$$

$$k_t = ( 0.75 / 0.75 )^{1.1} = 1$$

$$A = 1.1 * ( 1.46 * 1.35 + 3.55 * 1.35 ) = 7.44 \text{ kN/m} < 12.00$$

$$k_A = 1.0 + ( A - 1 ) * 0.08 = 1.0 + ( 7.44 - 1 ) * 0.08 = 1.52$$

$$C_{\vartheta A,k} = 5.2 * 1 * 1 * 1.52 = 7.88$$

$$C_{J,k,\text{vorh}} = 1 : ( 1 / C_{\vartheta M,k} + 1 / C_{\vartheta P,k} + 1 / C_{\vartheta A,k} ) =$$

$$= 1 : ( 1 / 149.40 + 1 / 49.20 + 1 / 7.88 ) = \mathbf{6.50 \text{ kNm/m} > 6.12}$$

**Bedingung (8) ist erfüllt**

### 3.1 Beispiel 2

wie Beispiel 1, aber Blech nur in jeder zweiten Sicke befestigt  $\textcircled{R}$   $C'_{JA,k} = 3.10$

Profil IPE 200,  $\rightarrow W_y = 194 \text{ cm}^3$   $J_{z,k} = 142 \text{ cm}^4$   $\text{vorh } b = 100 \text{ mm}$ ,  $M_{pl,k} = 53.00 \text{ kNm}$   
 Dacheindeckung aus Trapezblechen E 95 / 075 mit  $J_{\text{eff}} = 143 \text{ cm}^4/\text{m}$

Schnittkräfte wie vor

$$C_{J,k,\text{erf}} \geq [ M_{pl,k}^2 * k_{\vartheta} * k_v * (M_{el,y,\text{vorh}} / M_{el,y,\text{max}})^2 ] : ( E * J_{z,k} ) =$$

$$= [ 5300^2 * 3.5 * 0.35 * ( 33.92 / 46.56 )^2 ] : ( 21000 * 142 ) =$$

$$= 11.54 * 0.73^2 = 6.12 \text{ kNm/m}$$

$$C_{\vartheta M,k} = k * E * J / a = 2 * 21000 * 143 / ( 402 * 100 ) = 149.40 \text{ kNm/m}$$

$$C_{\vartheta P,k} = 49.20 \text{ kNm/m}$$

$$C_{\vartheta A,k} = C'_{\vartheta A,k} * k_b * k_t * k_A$$

**Blech in jeder zweiten Sicke befestigt**

$\rightarrow C'_{\vartheta A,k} = 3.10$  Trapezblech E 96 / 0.75, Positivlage

$$k_b = ( 100 / 100 )^2 = 1$$

$$k_t = ( 0.75 / 0.75 )^{1.1} = 1$$

$$A = 1.1 * ( 1.46 * 1.35 + 3.55 * 1.35 ) = 7.44 \text{ kN/m} < 12.00$$

$$k_A = 1.0 + ( A - 1 ) * 0.08 = 1.0 + ( 7.44 - 1 ) * 0.08 = 1.52$$

$$C_{\vartheta A,k} = 3.1 * 1 * 1 * 1.52 = 4.71$$

$$C_{\vartheta,k,\text{vorh}} = 1 : ( 1 / C_{\vartheta M,k} + 1 / C_{\vartheta P,k} + 1 / C_{\vartheta A,k} ) =$$

$$= 1 : ( 1 / 149.40 + 1 / 49.20 + 1 / 4.71 ) = 4.18 \text{ kNm/m} < 6.12$$

**Bedingung ( 8 ) ist nicht erfüllt**

In diesem Falle kann die vorhandene Drehfedersteifigkeit zur Erhöhung des Torsionsträgheitsmomentes benutzt werden.

Nach [5], S. 180, Gl. 5.44, ergibt sich  $I_{t,\text{ideell}} = I_t + C_{\vartheta} * L^2 / ( \pi^2 * G )$

(Vorsicht, nach [2], ist auf Seite 174 diese Gleichung (2-3.16) falsch angegeben)

$$\text{Damit würde für den IPE 200 } \rightarrow I_{\omega} = 12990 \text{ cm}^6 \rightarrow I_t = 7.02 \text{ cm}^4 \rightarrow I_z = 142 \text{ cm}^4$$

$$L = 6.90 \text{ m} \quad M_{pl,y,k} = 53.00 \text{ kNm} \quad M_{pl,y,d} = 48.18 \text{ kNm}$$

$$I_{t,\text{ideell}} = 7.02 + 4.18 * 690^2 / ( \pi^2 * 8100 ) = 7.02 + 24.88 = 31.90 \text{ cm}^4$$

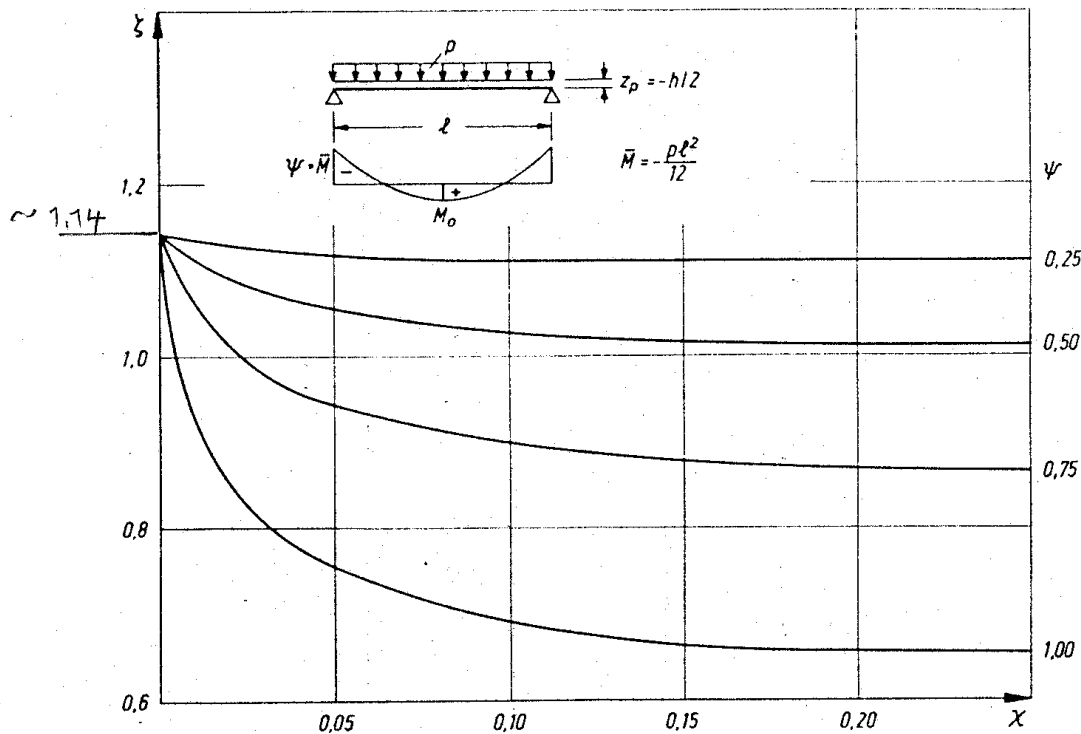
$$c^2 = ( I_{\omega} + 0.039 * L^2 * I_{t,\text{ideell}} ) / I_z = ( 12990 + 0.039 * 690^2 * 31.90 ) / 142 = 4262.72$$

$$c = 65.29$$

$$N_{ki,z} = \pi^2 * E * I_z / L^2 = \pi^2 * 21000 * 142 / 690^2 = 61.82 \text{ kN}$$

$$C = \frac{E * J_w}{l^2 * G * J_{\text{ideell}}} = \frac{21000 * 12990}{690^2 * 8100 * 31.90} = 0.0022 \quad \text{praktisch null}$$

daraus nach [5], Bild 5.19  $\xi = \text{ca. } 1.14$   $z_p = - 10 \text{ cm}$



**Abbildung 11: Momentenbeiwert x nach [5]**

$$\begin{aligned}
 M_{ki,y} &= \xi^* N_{ki,z} * \left( \sqrt{c^2 + 0.25 * z_p^2} + 0.5 * z_p \right) = \\
 &= 1.14 * 61.82 * \left( \sqrt{4262.72 + 0.25 * 10^2} - 0.5 * 10 \right) = \\
 &= 1.14 * 61.82 * 60.48 = 4263 \text{ kNcm}
 \end{aligned}$$

$$\lambda'_{M} = \sqrt{M_{pl,y,k} / M_{ki,y}} = \sqrt{53.00 / 42.63} = 1.115$$

n = 2.5 gewalzter Träger nach [1], Tabelle 9

$$\kappa_M = 1 \quad \rightarrow \text{für } \lambda'_{M} \leq 0.4$$

$$\kappa_M = \left( \frac{1}{1 + \lambda'^{2n}_M} \right)^{1/n} \quad \rightarrow \text{für } \lambda'_{M} > 0.4$$

$$\kappa_M = \left( \frac{1}{1 + \lambda'^{2n}_M} \right)^{1/n} = \left( \frac{1}{1 + 1.115^5} \right)^{0.40} = 0.670$$

Die vorhandene Normalkraft ist in diesem Falle vernachlässigbar

$$M_{y,d} / (\kappa_M * M_{pl,y,d}) \leq 1 = 30.84 / (0.670 * 48.18) = 0.956 < 1$$

**Bedingung (16) ist erfüllt**

Erforderliche Schubsteifigkeit nach DIN 18800/2, Bedingung (7)

$$\text{erf } S \geq (E \cdot I_{\omega} \cdot \pi^2 / l^2 + G \cdot I_t + E \cdot I_z \cdot \pi^2 / l^2 \cdot 0.25 \cdot h^2) \cdot (70 / h^2)$$

Für IPE 200  $\rightarrow I_{\omega} = 12990 \text{ cm}^6$   $I_t = 7.02 \text{ cm}^4$   $I_z = 142 \text{ cm}^4$   $L = 6.90 \text{ m}$

$$\begin{aligned} \text{erf } S &\geq (21000 \cdot 12990 \cdot \pi^2 / 690^2 &= 5655 \\ &+ 8100 \cdot 7.02 &= 56862 \\ &+ 21000 \cdot 142 \cdot \pi^2 / 690^2 \cdot 0.25 \cdot 20^2 &= 6182) \end{aligned}$$

---


$$= 68699 \cdot (70 / 20^2) = \mathbf{12022 \text{ kN}}$$

vorh. Trapezblech E96 / 075 Positivlage

$$K_1 = 0.268 \text{ m/kN}$$

$$K_2 = 28.7 \text{ m}^2/\text{kN} \quad \begin{array}{l} \text{gesamte Schubfeldlänge} = 402 \cdot 2 = 804 \text{ cm} \\ \text{Binderabstand} = 402 \text{ cm} \end{array}$$

$$G_s = 10^4 / (0.268 + 28.7 \cdot 100 / 804) = 2605.7 \text{ kN/m}$$

Bei Befestigung in **jeder** Sicke ergibt sich

$$\text{vorh } S = \frac{1}{1} \cdot \frac{402}{100} \cdot 2605.7 = \mathbf{10475} < 12022 \text{ kN}$$

Bei Befestigung in **jeder zweiten** Sicke ergibt sich

$$\text{vorh } S = \frac{1}{5} \cdot \frac{402}{100} \cdot 2605.7 = \mathbf{2095} < 12022 \text{ kN}$$

Die vorhandene Schubsteifigkeit ist in beiden Fällen kleiner als die erforderliche. Damit gibt es nach DIN 18800/2 aber keine Möglichkeit, sie stabilisierend zu nutzen.

Es werden nachfolgend mit dem Programm **Drill** die Ergebnisse zu Beispiel 2 verglichen.

Außerdem wird mit **Drill** ein Nachweis nur mit der vorhandenen Schubsteifigkeit von 2095 kN geführt um den Einfluß derselben zu demonstrieren.

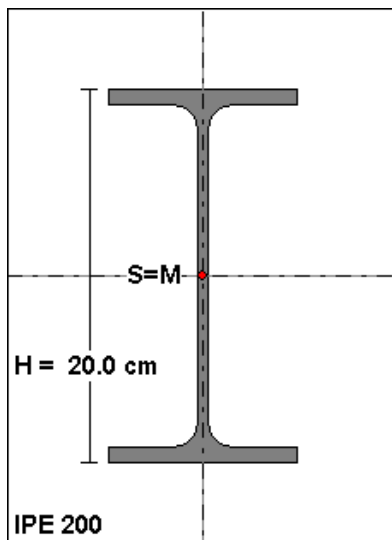
In beiden Fällen wird keine volle Gabellagerung eingeführt, sondern nur die nachfolgend ermittelte Drehfedersteifigkeit der Stiele.

Drehfedern der Stiele IPE 200 am Auflager des Riegels

$$= 3 \cdot E \cdot J_z / l_{\text{Stiel}} = 3 \cdot 2100 \cdot 142 / 240 = 37275 \text{ kNcm}$$

### 3.2 Beispiel 3

System, Belastung und Federsteifigkeiten (Drehfeder 4.18 kN/m) wie bei Handrechnung Beispiel 2, Vergleich mit den Ergebnissen der Handrechnung. Es wurde keine Gabellagerung angesetzt, nur die Federsteifigkeit des Stieles.



Dieser Querschnitt und die Stützweite werden bei den folgenden Beispielen Nr 4, 5 und 7 beibehalten.

**Abbildung 12: Querschnitt**

-----	
Profiltyp : Walzprofil IPE 200	(ProfilNr : 11)
-----	
Gesamthöhe des Profils	H = 20.000 cm
Stegdicke	T1 = 0.560 cm
Obere Flanschbreite	BO = 10.000 cm
Obere Flanschdicke	TO = 0.850 cm
-----	
Querschnittsgrößen :	
-----	
Schwerpunktsabstand von Obergurtmitte	EZ = 9.575 cm
Fläche	A = 28.484 cm**2
Trägheitsmoment	Iy = 1943.166 cm**4
Trägheitsmoment	Iz = 142.368 cm**4
St.Venant-scher Torsionswiderstand	IT = 6.980 cm**4
Schubmittelpunkts-Abstand	ZM = 0.000 cm
Wölbwiderstand	CM = 1.2988E+0004 cm**6
Querschnittsgröße (ohne 2*ZM)	Ry = 0.000 cm
Maximale Verwölbung des Obergurtes	W1 = 47.875 cm**2
Maximale Verwölbung des Untergurtes	W2 = -47.875 cm**2
Widerstandsmoment fuer den oberen Rand	WyO = 194.317 cm**3
Widerstandsmoment fuer den unteren Rand	WyU = 194.317 cm**3
-----	
Vollplastische Schnittgrößen (Gamma_M = 1.0) :	
-----	
Streckgrenze nach DIN 18800, Teil 1	fy,k = 24.000 kN/cm**2
Vollplastische Normalkraft	Npl = 683.619 kN
Vollplastisches Moment	Mply = 52.953 kN*m
Vollplastisches Moment	Mplz = 10.707 kN*m
Reduziertes pl. Moment (a_pl = 1.25)	Mplz = 8.542 kN*m
Vollplastisches Moment	Mplw = 0.977 kN*m*m
Vollplastische Querkraft	Qply = 193.991 kN
Vollplastische Querkraft	Qplz = 148.596 kN
Vollplastisches Widerstandsmoment	Wply = 220.639 cm**3
Vollplastisches Widerstandsmoment	Wplz = 44.612 cm**3
Elastizitätsmodul	E = 21000.000 kN/cm**2
Schubmodul	G = 8100.000 kN/cm**2

-----  
 Trägerlängen :  
 -----

Der Träger hat eine Gesamtlänge von 690.000 cm  
 und wurde in 2 Felder unterteilt mit folgenden Feldlängen :  
 L( 1) = 345.000 cm  
 L( 2) = 345.000 cm

-----  
 Lagerungsbedingungen :  
 -----

	Vertikalver- schiebung w (cm)	Horizontalver- schiebung v (cm)	Verdrehung Teta
Knoten 0	Gelenkige Lagerung	Starre Halterung	keine Lagerung + Drehfeder kDx
Knoten 1	keine Lagerung	keine Lagerung	keine Lagerung
Knoten 2	Gelenkige Lagerung	Starre Halterung	keine Lagerung + Drehfeder kDx

-----  
 Federsteifigkeiten an den Knoten :  
 -----

	Seitenfeder ky[kN/m]	Drehfedern kDz[kN·m]    kDx[kN·m]	Wölbfeder kw[kN·m**3]
Knoten 0	0.00	0.00    372.75	0.0000
Knoten 2	0.00	0.00    372.75	0.0000

-----  
 Abstände ez der Lager oder Federn von der Profil-Oberkante,  
 Außermittigkeiten ey der vertikalen Lager aus der Symmetrieebene z-z :  
 -----

	Vertikallager		Seitenlager oder Seitenfeder ky
	ez_LagerZ[cm]	ey_LagerZ[cm]	ez_LagerY[cm]
Knoten 0	20.000	0.000	10.000
Knoten 2	20.000	0.000	10.000

-----  
 Federsteifigkeiten in den Feldern :  
 -----

	Schubfeldsteifigkeit S*[kN·m/m]	Bettung kv[kN/m/m]	Drehbettung kTeta[kN·m/m]
Feld 1-2	0.000	0.000	4.180

(Federsteifigkeiten konstant am gesamten Träger)

-----  
 Abstände der Schubfelder oder Federn von der Profil-Oberkante in cm :  
 -----

	Schubfeld ez_S*[cm]	Bettung kv ez_kv[cm]
Feld 1-2	0.000	0.000

-----  
 Streckenlasten qz und Eigengewicht g in den Feldern :  
 (Das Eigengewicht wirkt stets im Schwerpunkt S)  
 -----

	qz[kN/m]	Abstand von der Profil- Oberkante[cm]	Exzentrizität zur z-Achse [cm]	g[kN/m] in S
Feld 1-2	6.760	6.760	0.00	0.000

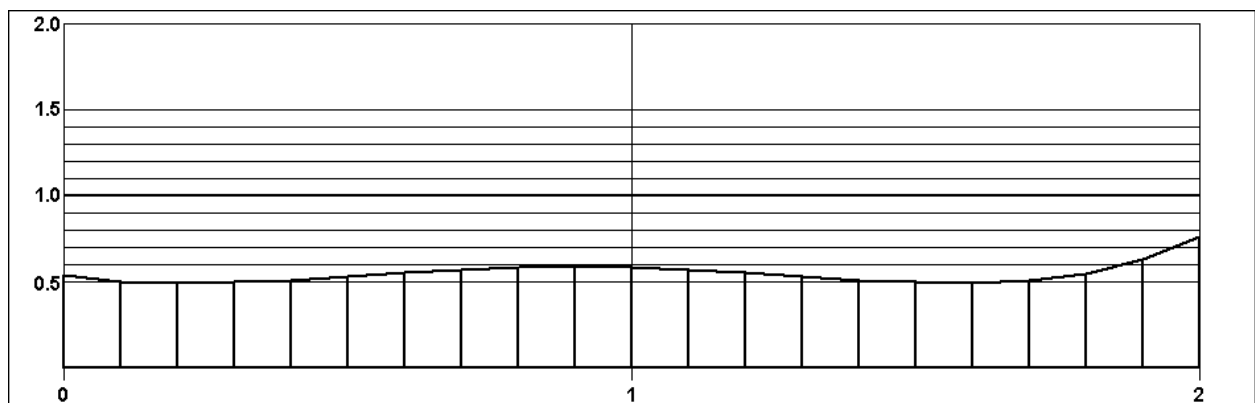
(Streckenlasten konstant am Träger)

-----  
 Einzel-Lastmomente an den Knoten :  
 -----

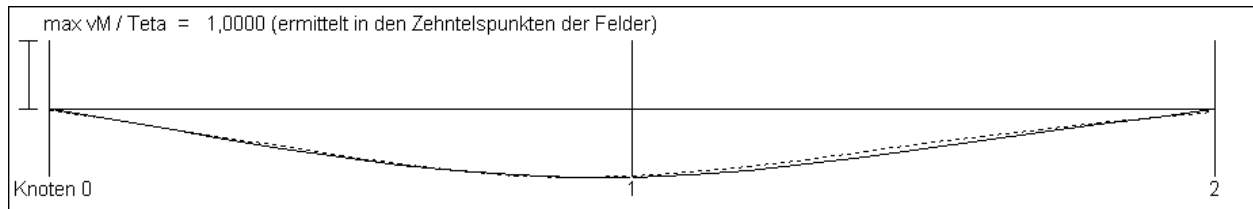
	Horizontalmoment My[kN·m]	Vertikalmoment Mz[kN·m]	Torsionsmoment Mx[kN·m]
Knoten 0	-13.260	0.000	0.000
Knoten 2	30.840	0.000	0.000

-----  
 Tragsicherheitsnachweis des Trägers nach DIN 18800, Teil 1 oder 2  
 Ersatzstabverfahren für einachsige Biegung ohne N-Kraft nach Gl.(16)  
 -----

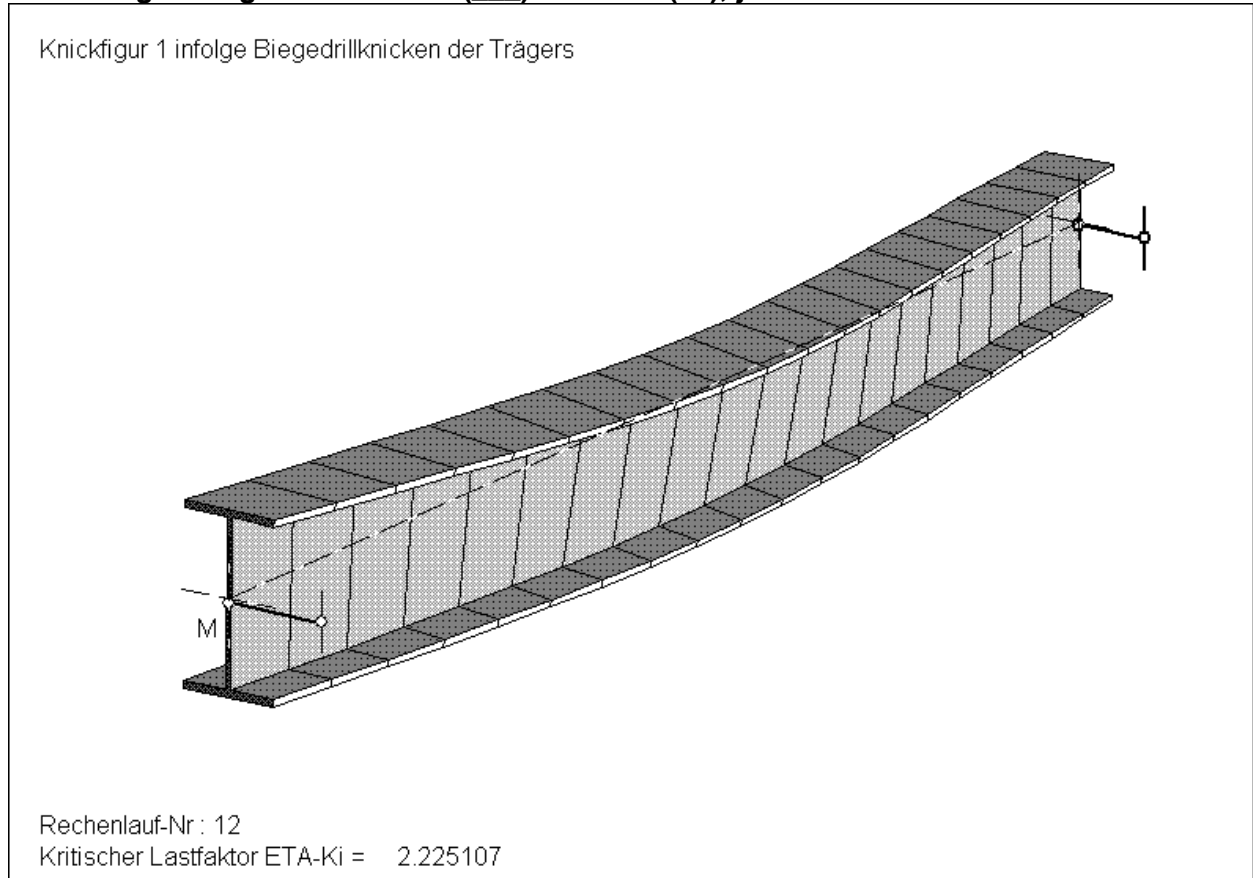
Profil : Walzprofil IPE 200  
 Sicherheitsbeiwert  $\gamma_{M}$  : 1.10  
 Npl : 621.4714 kN  
 Mply : 48.1393 kN\*m  
 Mplz : 9.7336 kN\*m  
 (Eine Abminderung von Mplz ist hier nicht erforderlich.)  
 Die maximale Beanspruchung tritt auf in Feld 2, Schnitt 10 :  
 Abstand x im Träger : 690.00 cm  
 Normalkraft N(x) : 0.0000 kN  
 Moment My(x) : -30.8400 kN\*m  
 Moment Mz(x) : 0.0000 kN\*m  
 Kritischer Lastfaktor für die Querlasten allein :  
 ETAM : 2.22511  
 Kritischer Lastfaktor für die Normalkräfte allein :  
 ETAN : 0.00000  
 Knickspannungslinie : b-Linie  
 Momentenbeiwert nach Tab.11 : 1.30  
 Trägerbeiwert n nach Tab.9 : 2.50  
 Abminderungsfaktor  $K_n$  : 1.00  
 Lambda-Z für NKi : 0.0000  
 Kappa-Z : 1.0000  
 Lambda-M fuer My,Ki : 0.8784  
 Kappa-M : 0.8451  
 +-----+  
 Tragsicherheit : 0.758  
 +-----+



**Abbildung 13: Tragsicherheitsnachweis in den Zehntelpunkten aller Felder**



**Abbildung 14: Eigenfunktion  $v_M$  (\_\_\_) und Teta (...), jeweils auf den Maximalwert normiert**



**Abbildung 15: Knickfigur**

Ergebnis: Mit **Drill** ergibt sich mit der vorhandenen Drehfedersteifigkeit von 4.18 kN/m ausreichende Tragsicherheit

### 3.3 Beispiel 4

System, Belastung und Federsteifigkeiten wie bei Beispiel 2, jedoch zusätzlich die vorhandene Schubsteifigkeit  $S = 2095 \text{ kNm/m}$  berücksichtigt. Querschnitt wie bei Beispiel Nr 3 = IPE 200

-----  
 Federsteifigkeiten in den Feldern :  
 -----

	Schubfeldsteifigkeit S*[kN·m/m]	Bettung kv[kN/m/m]	Drehbettung kTeta[kN·m/m]
Feld 1-2	2095.000	0.000	4.180

(Federsteifigkeiten konstant am gesamten Träger)

-----  
 Abstände der Schubfelder oder Federn von der Profil-Oberkante in cm :  
 -----

	Schubfeld ez_S*[cm]	Bettung kv ez_kv[cm]
Feld 1-2	0.000	0.000

-----  
 Streckenlasten qz und Eigengewicht g in den Feldern :  
 (Das Eigengewicht wirkt stets im Schwerpunkt S)  
 -----

	qz[kN/m] Feld- anfang	Feld- ende	Abstand von der Profil- Oberkante[cm]	Exzentrizität zur z-Achse [cm]	g[kN/m] in S
Feld 1-2	6.760	6.760	0.00	0.00	0.000

(Streckenlasten konstant am Träger)

-----  
 Einzel-Lastmomente an den Knoten :  
 -----

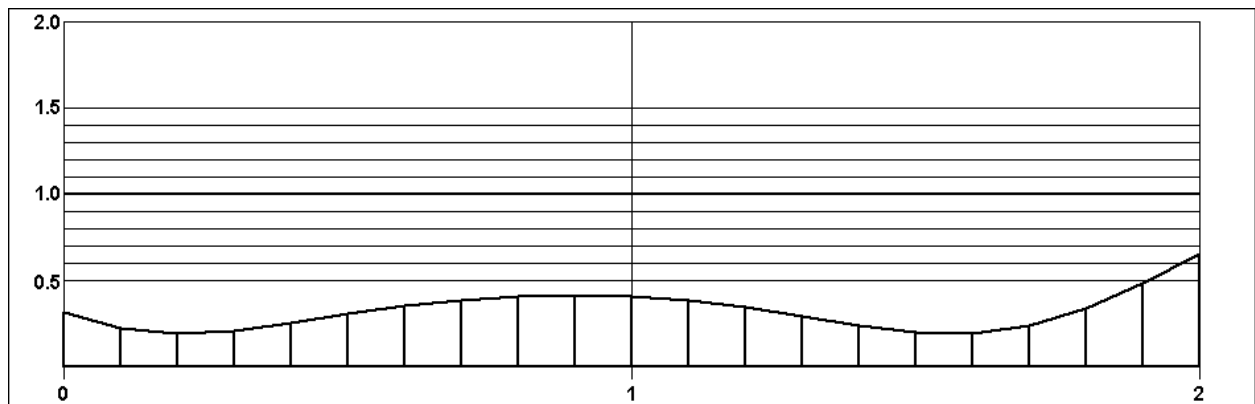
	Horizontalmoment My[kN·m]	Vertikalmoment Mz[kN·m]	Torsionsmoment Mx[kN·m]
Knoten 0	-13.260	0.000	0.000
Knoten 2	30.840	0.000	0.000

-----  
 Tragsicherheitsnachweis des Trägers nach DIN 18800, Teil 1 oder 2  
 Ersatzstabverfahren für einachsige Biegung ohne N-Kraft nach Gl.(16)  
 -----

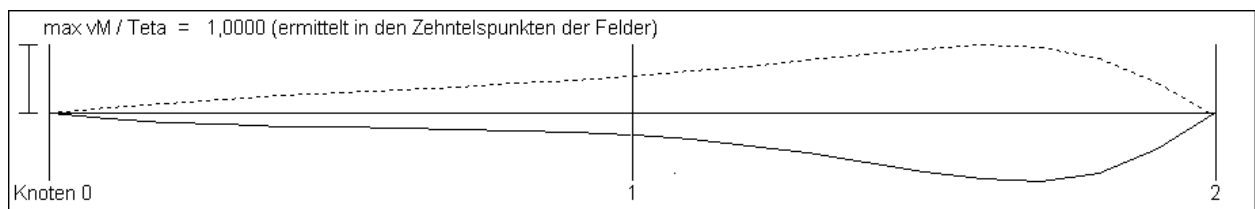
Profil : Walzprofil IPE 200

Sicherheitsbeiwert GammaM	:	1.10
Npl	:	621.4714 kN
Mply	:	48.1393 kN*m
Mplz	:	9.7336 kN*m
(Eine Abminderung von Mplz ist hier nicht erforderlich.)		
Die maximale Beanspruchung tritt auf in Feld 2, Schnitt 10 :		
Abstand x im Träger	:	690.00 cm
Normalkraft N(x)	:	0.0000 kN
Moment My(x)	:	-30.8400 kN·m
Moment Mz(x)	:	0.0000 kN·m
Kritischer Lastfaktor für die Querlasten allein :		
ETAM	:	5.64698
Kritischer Lastfaktor für die Normalkräfte allein :		
ETAN	:	0.00000
Knickspannungslinie	:	b-Linie
Momentenbeiwert nach Tab.11	:	1.30
Trägerbeiwert n nach Tab.9	:	2.50
Abminderungsfaktor Kn	:	1.00
Lambda-Z für NKi	:	0.0000
Kappa-Z	:	1.0000
Lambda-M fuer My,Ki	:	0.5514
Kappa-M	:	0.9803

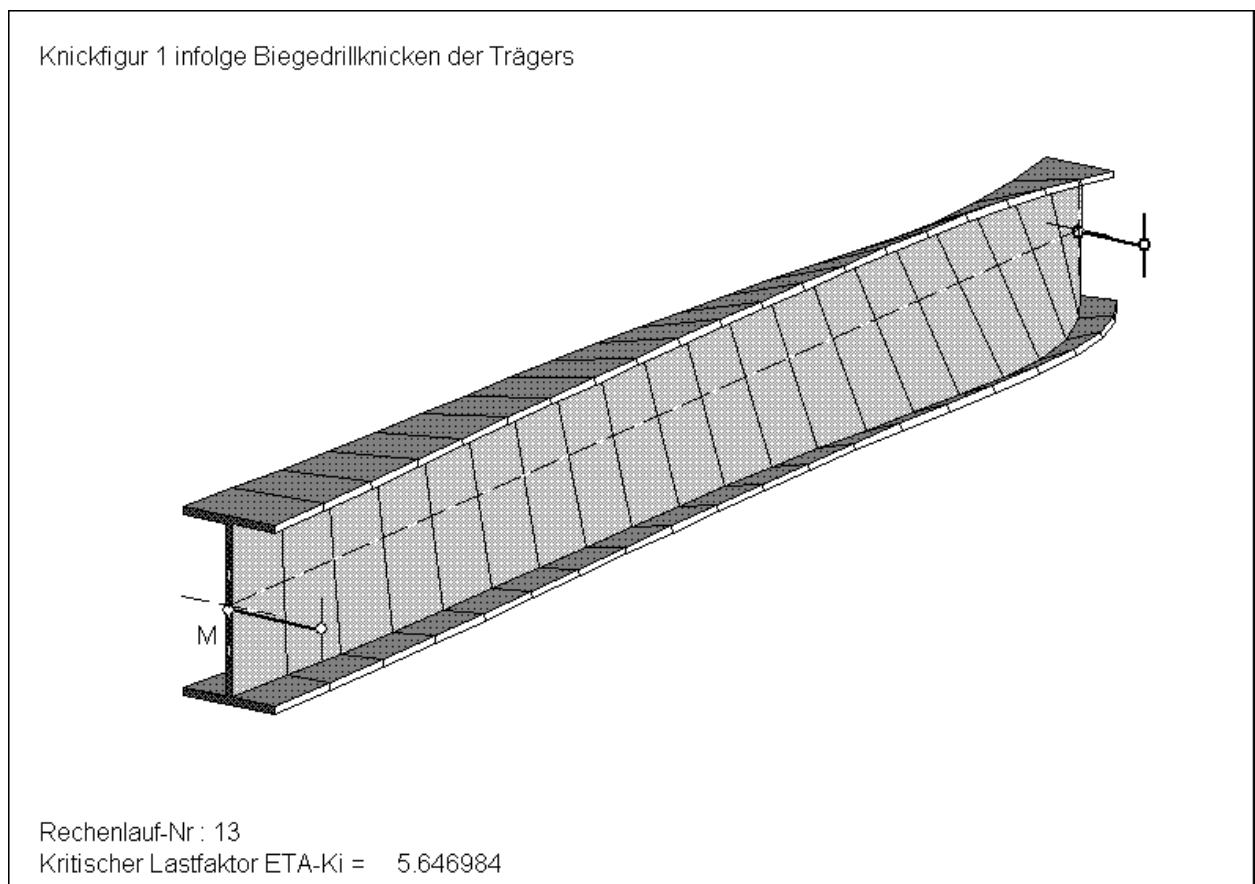
++++  
 Tragsicherheit : 0.654  
 +++++



**Abbildung 16: Tragsicherheitsnachweis in den Zehntelpunkten**



**Abbildung 17: Eigenfunktion  $v_M$  (\_\_\_) und Teta (....) auf den Maximalwert normiert**



**Abbildung 18: Knickfigur**

### 3.4 Beispiel 5

Das System und die Belastung sind wie bei Beispiel 2, jedoch wurde nur die vorhandene Schubsteifigkeit  $S = 2095 \text{ kNm/m}$  berücksichtigt. Die Drehfedersteifigkeit ist hier nicht angesetzt. Querschnitt wie bei Beispiel Nr 3 = IPE 200.

Es sollte untersucht werden, ob die vorhandene Drehfedersteifigkeit, die unter  $10.2 \cdot \text{Mpl, k/h}$  liegt, allein ausreicht, um den Träger zu stabilisieren.

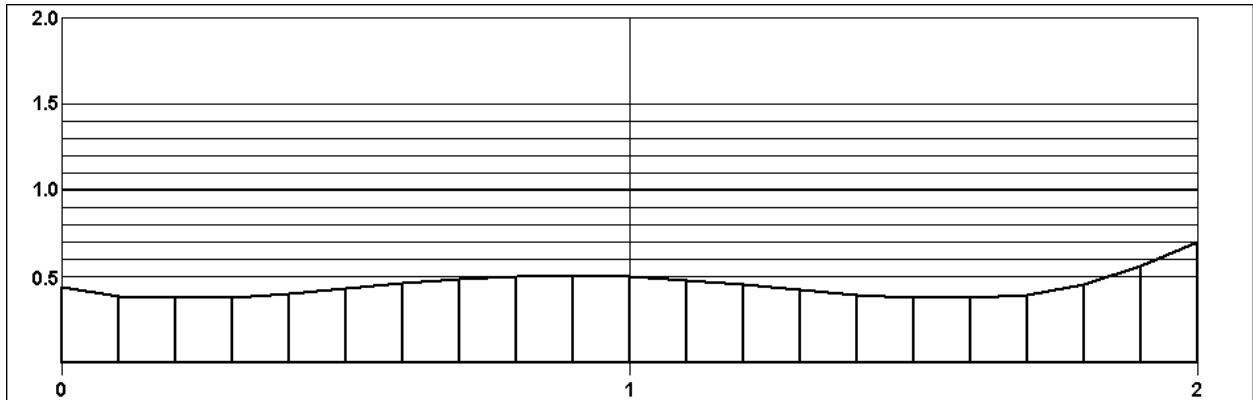
```

-----
Federsteifigkeiten in den Feldern :
-----
                Schubfeldsteifigkeit      Bettung      Drehbettung
                S*[kN·m/m]                kv[kN/m/m]    kTeta[kN·m/m]
Feld  1-2      2095.000                    0.000          0.000
                (Federsteifigkeiten konstant am gesamten Träger)
-----

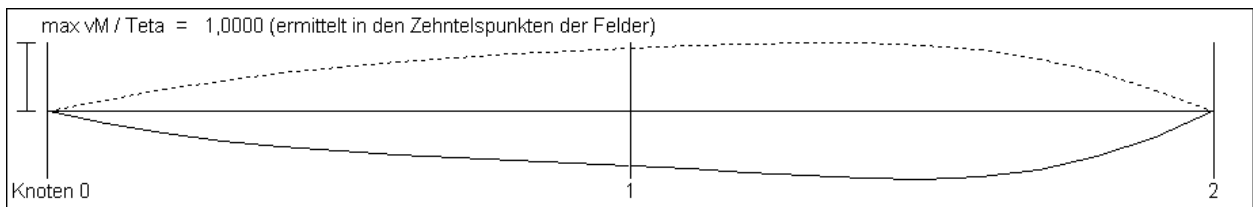
Abstände der Schubfelder oder Federn von der Profil-Oberkante in cm :
-----
                Schubfeld      Bettung kv
                ez_S*[cm]      ez_kv[cm]
Feld 1-2      0.000            0.000
-----

Tragsicherheitsnachweis des Trägers nach DIN 18800, Teil 1 oder 2
Ersatzstabverfahren für einachsige Biegung ohne N-Kraft nach Gl.(16)
-----
Profil : Walzprofil IPE 200
Sicherheitsbeiwert  GammaM      :    1.10
Npl                 :    621.4713 kN
Mply                 :    48.1393 kN*m
Mplz                 :    9.7336 kN*m
(Eine Abminderung von Mplz ist hier nicht erforderlich.)
Die maximale Beanspruchung tritt auf in Feld 2, Schnitt 10 :
Abstand x im Träger      :    690.00 cm
Normalkraft N(x)         :    0.0000 kN
Moment My(x)             :   -30.8400 kN·m
Moment Mz(x)             :    0.0000 kN·m
Kritischer Lastfaktor für die Querlasten allein :
ETAM                     :    2.93392
Kritischer Lastfaktor für die Normalkräfte allein :
ETAN                     :    0.00000
Knickspannungslinie     :    b-Linie
Momentenbeiwert nach Tab.11 :    1.30
Trägerbeiwert n nach Tab.9 :    2.50
Abminderungsfaktor Kn   :    1.00
Lambda-Z für NKi        :    0.0000
Kappa-Z                  :    1.0000
Lambda-M fuer My,Ki     :    0.7650
Kappa-M                  :    0.9111
+++++
Tragsicherheit           :    0.703
+++++

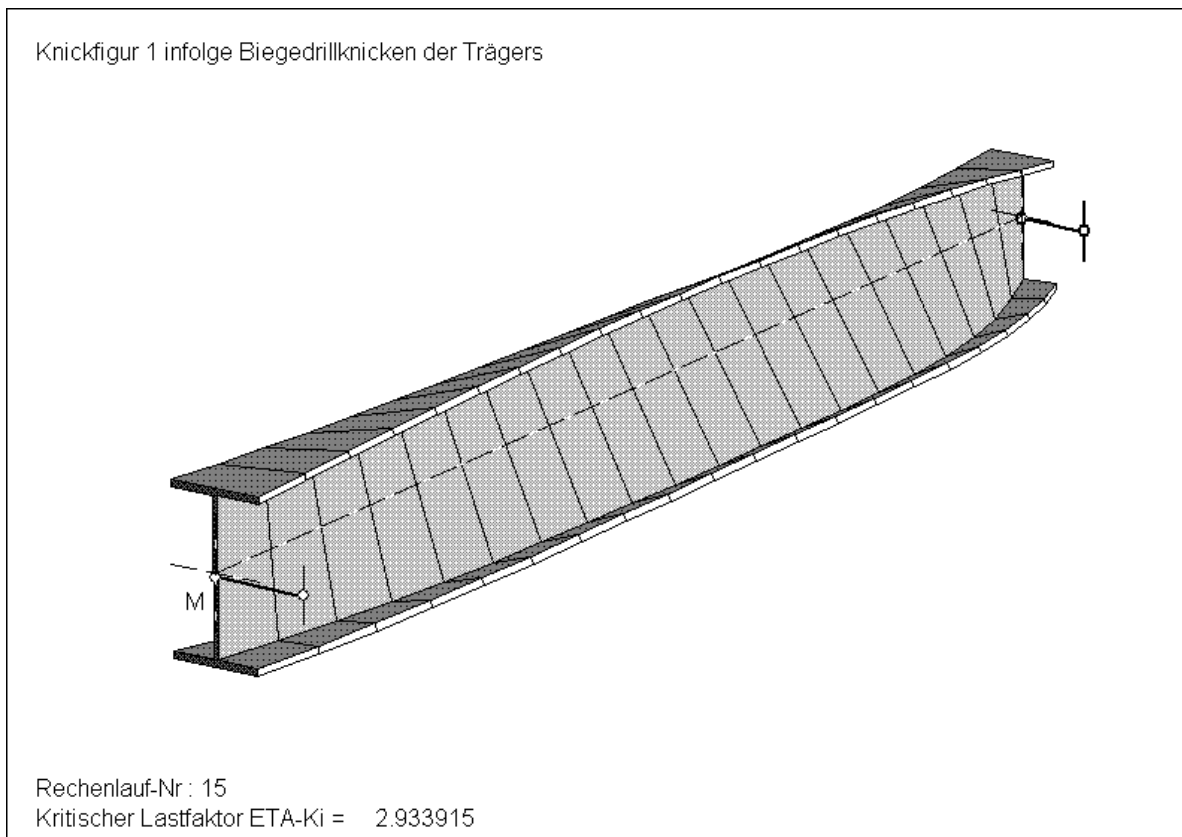
```



**Abbildung 19: Tragsicherheitsnachweis in den Zehntelpunkten**



**Abbildung 20: Eigenfunktion vM (\_\_\_) und Teta (....) auf den Maximalwert normiert**



**Abbildung 21: Knickfigur**

Das Ergebnis zeigt, daß in diesem Falle, wo die Beanspruchungen im elastischen Bereich bleiben, die vorhandene Schubsteifigkeit der Eindeckung allein ausreicht, den Träger zu stabilisieren.

### 3.5 Beispiel 6

Einfeldträger mit Doppelbiegung und Torsion, Beispiel nach Petersen Seite 755 Nachweis nach Theorie II. Ordnung und Vergleich mit den Ergebnissen von Petersen. Die Lasten greifen 5 cm über dem Obergurt an. Vorverformungen wurden keine angesetzt.

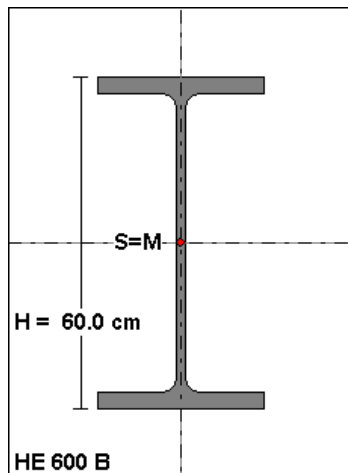


Abbildung 22: Querschnitt

-----	
Profiltyp : Walzprofil HE 600 B	(ProfilNr : 11)
-----	
Gesamthöhe des Profils	H = 60.000 cm
Stegdicke	T1 = 1.550 cm
Obere Flanschbreite	BO = 30.000 cm
Obere Flanschdicke	TO = 3.000 cm
-----	
Querschnittsgrößen :	
-----	
Schwerpunktsabstand von Obergurtmitte	EZ = 28.500 cm
Fläche	A = 269.958 cm**2
Trägheitsmoment	Iy = 171041.035 cm**4
Trägheitsmoment	Iz = 13530.238 cm**4
St.Venant-scher Torsionswiderstand	IT = 667.175 cm**4
Schubmittelpunkts-Abstand	ZM = 0.000 cm
Wölbwiderstand	CM = 1.0965E+0007 cm**6
Querschnittsgröße (ohne 2*ZM)	Ry = 0.000 cm
Maximale Verwölbung des Obergurtes	W1 = 427.500 cm**2
Maximale Verwölbung des Untergurtes	W2 = -427.500 cm**2
Widerstandsmoment fuer den oberen Rand	WyO = 5701.368 cm**3
Widerstandsmoment fuer den unteren Rand	WyU = 5701.368 cm**3
-----	
Elastizitätsmodul	E = 21000.000 kN/cm**2
Schubmodul	G = 8100.000 kN/cm**2
-----	
Trägerlängen :	
-----	
Der Träger hat eine Gesamtlänge von 800.000 cm	
und wurde in 2 Felder unterteilt mit folgenden Feldlängen :	
L( 1) =	400.000 cm
L( 2) =	400.000 cm

-----  
 Lagerungsbedingungen :  
 -----

	Vertikalver- schiebung w (cm)	Horizontalver- schiebung v (cm)	Verdrehung Teta
Knoten 0	Gelenkige Lagerung	Starre Halterung	Gabellager
Knoten 1	keine Lagerung	keine Lagerung	keine Lagerung
Knoten 2	Gelenkige Lagerung	Starre Halterung	Gabellager

-----  
 Abstände ez der Lager oder Federn von der Profil-Oberkante,  
 Außermittigkeiten ey der vertikalen Lager aus der Symmetrieebene z-z :  
 -----

	Vertikallager		Seitenlager oder Seitenfeder ky
	ez_LagerZ[cm]	ey_LagerZ[cm]	ez_LagerY[cm]
Knoten 0	60.000	0.000	30.000
Knoten 2	60.000	0.000	30.000

-----  
 Streckenlasten qz und Eigengewicht g in den Feldern :  
 (Das Eigengewicht wirkt stets im Schwerpunkt S)  
 -----

	qz[kN/m]	Abstand von der Profil- Oberkante[cm]	Exzentrizität zur z-Achse [cm]	g[kN/m] in S
Feld 1-2	68.000	68.000	-5.00	0.000
	(Streckenlasten konstant am Träger)			

-----  
 Streckenlasten qy und Streckenmomente mT in den Feldern :  
 -----

	qy[kN/m]	Abstand von der Profil- Oberkante[cm]	Exzentrizität zur z-Achse [cm]	mT[kN·m/m]
Feld 1-2	6.800	-5.00	0.00	0.000
	(Streckenlasten konstant am Träger)			

Tragsicherheitsnachweis des Trägers nach der Spannungstheorie

- Berechnung der Schnittgrößen in der Trägerebene nach I.O.
- Berechnung der Schnittgrößen rechtwinklig zur Trägerebene nach II.O.  
mit Berücksichtigung von Vorverformungen  $v^*/Teta^*$   
Die nach DIN 18800-2, El.(202), eingegebenen Vorverformungen  
wurden zusätzlich mit 2/3 abgemindert (Verfahren E-E)

-----  
 Die maximale Randspannung tritt auf in Feld 1, Schnitt 10 :

Profil : Walzprofil HE 600 B

Abstand x im Träger	:	400.00 cm
Normalkraft N(x)	:	0.0000 kN
Biegemoment My(x)	:	544.0000 kN·m
Biegemoment Mz(x)	:	-78.0606 kN·m
Wölbmoment Mw(x)	:	13.7292 kN·m·m
Sicherheitsbeiwert GammaM	:	1.10

+++++

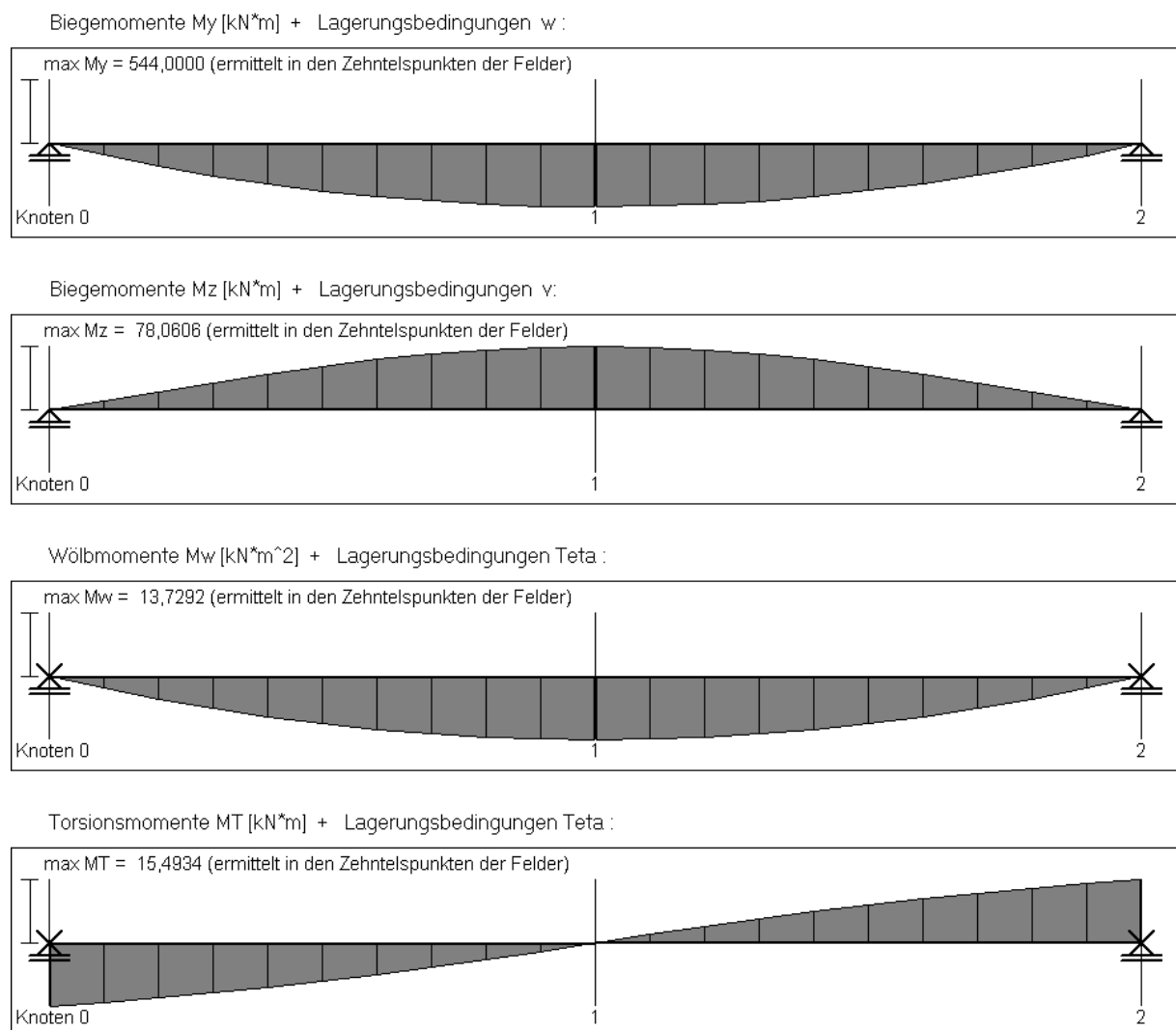
Randspannung max Sigmax : 23.548

+++++

```

Nachweis eines Fließgelenkes nach 18800-1 (757) :
Npl      : 5889.9881 kN
Mply     : 1401.8475 kN*m
Mplz_red : 246.0043 kN*m
(Nach 18800-1 ist Mplz beim Fließgelenk-Nachweis abzumindern.)
Mplw     : 83.9455 kN*m*m
Qply     : 1395.8161 kN
Qplz     : 1112.9213 kN
+++++
Fließgelenk-Nachweis      : 0.594
+++++
  
```

Es ist eine gute Übereinstimmung mit Petersen zu erkennen, der 22.55 kN/cm<sup>2</sup> ermittelt hatte



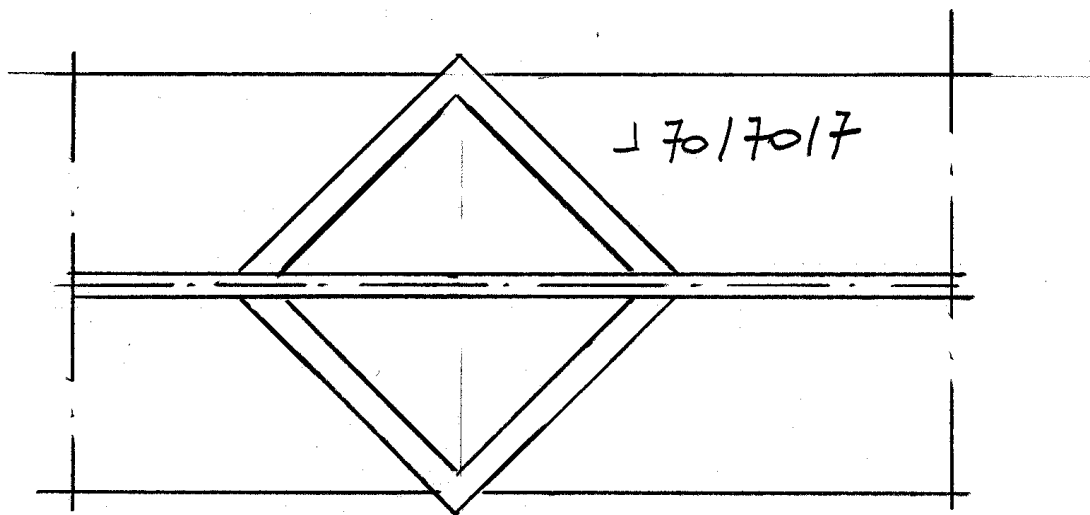
**Abbildung 23: Momentenverläufe nach Drill**

### 3.6 Beispiel 7

Derselbe Riegel wie bei den Beispielen 1 bis 5, in vier gleiche Abschnitte unterteilt und nur durch Wölbfedern gemäß nachfolgender Skizze in den 5 Knotenpunkten aussteift.

Profilhöhe =  $200 - 8.5 = 191.5$  mm.

Ergebniss = Tragsicherheit ist mit 0.889 gegeben!



$$K_W = 19,15 \cdot 8100 \cdot 0,7 \cdot 7^3 \cdot 10^{-6} = 37,24 \text{ kNm}^3$$

Abbildung 24: Wölbfedergeometrie

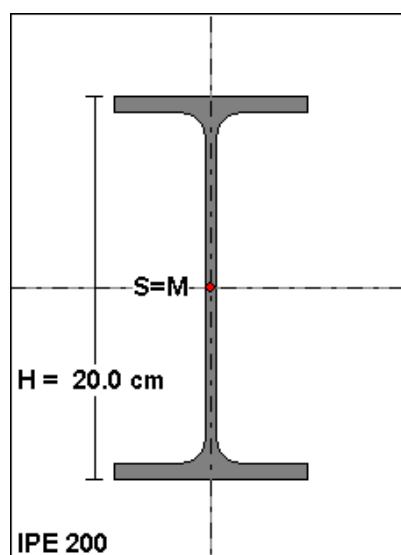


Abbildung 25: Querschnitt wie bei Beispiel Nr 3 = IPE 200

-----  
 Profiltyp : Walzprofil IPE 200 (ProfilNr : 11)  
 -----

Querschnittswerte wie bei Beispiel 3  
 -----

Trägerlängen :

Der Träger hat eine Gesamtlänge von 690.000 cm  
 und wurde in 4 Felder unterteilt mit folgenden Feldlängen :

L( 1) = 172.500 cm  
 L( 2) = 172.500 cm  
 L( 3) = 172.500 cm  
 L( 4) = 172.500 cm

-----  
 Lagerungsbedingungen :

	Vertikalver- schiebung w (cm)	Horizontalver- schiebung v (cm)	Verdrehung Teta
Knoten 0	Gelenkige Lagerung	Starre Halterung	keine Lagerung + Drehfeder kDx + Wölbfeder kw
Knoten 1	keine Lagerung	keine Lagerung	keine Lagerung + Wölbfeder kw
Knoten 2	keine Lagerung	keine Lagerung	keine Lagerung + Wölbfeder kw
Knoten 3	keine Lagerung	keine Lagerung	keine Lagerung + Wölbfeder kw
Knoten 4	Gelenkige Lagerung	Starre Halterung	keine Lagerung + Drehfeder kDx + Wölbfeder kw

-----  
 Federsteifigkeiten an den Knoten :

	Seitenfeder ky[kN/m]	Drehfedern kDz[kN·m]	kDx[kN·m]	Wölbfeder kw[kN·m**3]
Knoten 0	0.00	0.00	372.75	37.2400
Knoten 1	0.00	0.00	0.00	37.2400
Knoten 2	0.00	0.00	0.00	37.2400
Knoten 3	0.00	0.00	0.00	37.2400
Knoten 4	0.00	0.00	372.75	37.2400

-----  
 Abstände ez der Lager oder Federn von der Profil-Oberkante,  
 Außermittigkeiten ey der vertikalen Lager aus der Symmetrieebene z-z :

	Vertikallager		Seitenlager oder Seitenfeder ky
	ez_LagerZ[cm]	ey_LagerZ[cm]	ez_LagerY[cm]
Knoten 0	20.000	0.000	10.000
Knoten 4	20.000	0.000	10.000

-----  
 Streckenlasten qz und Eigengewicht g in den Feldern :  
 (Das Eigengewicht wirkt stets im Schwerpunkt S)

	qz[kN/m]	Abstand von der Profil- Oberkante[cm]	Exzentrizität zur z-Achse [cm]	g[kN/m] in S
	Feld- anfang	Feld- ende		
Feld 1-4	6.760	6.760	0.00	0.000

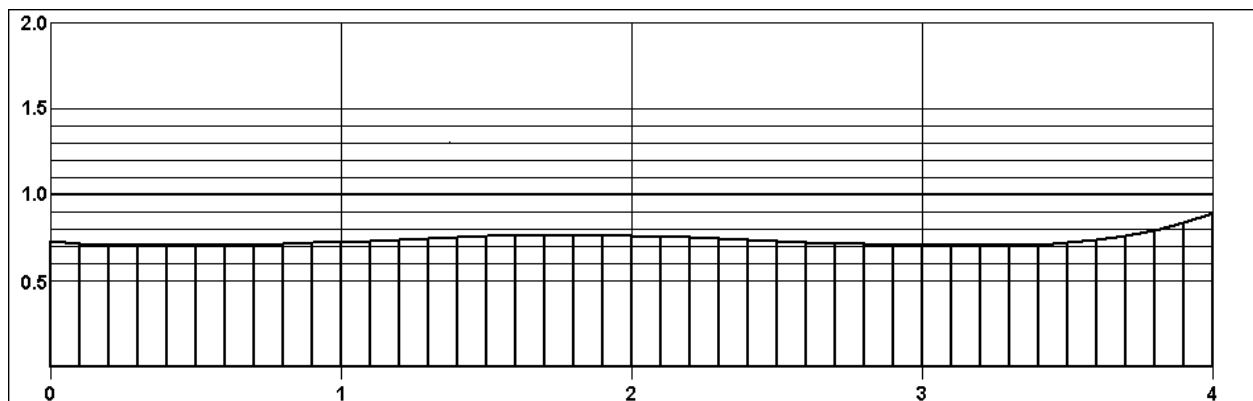
(Streckenlasten konstant am Träger)

-----  
 Einzel-Lastmomente an den Knoten :  
 -----

	Horizontalmoment My[kN·m]	Vertikalmoment Mz[kN·m]	Torsionsmoment Mx[kN·m]
Knoten 0	-13.260	0.000	0.000
Knoten 4	30.840	0.000	0.000

-----  
 Tragsicherheitsnachweis des Trägers nach DIN 18800, Teil 1 oder 2  
 Ersatzstabverfahren für einachsige Biegung ohne N-Kraft nach Gl.(16)  
 -----

Profil : Walzprofil IPE 200  
 Sicherheitsbeiwert  $\gamma_{M}$  : 1.10  
 $N_{pl}$  : 621.4713 kN  
 $M_{ply}$  : 48.1393 kN·m  
 $M_{plz}$  : 9.7336 kN·m  
 (Eine Abminderung von  $M_{plz}$  ist hier nicht erforderlich.)  
 Die maximale Beanspruchung tritt auf in Feld 4, Schnitt 10 :  
 Abstand x im Träger : 345.00 cm  
 Normalkraft N(x) : 0.0000 kN  
 Moment My(x) : -30.8400 kN·m  
 Moment Mz(x) : 0.0000 kN·m  
 Kritischer Lastfaktor für die Querlasten allein :  
 ETAM : 1.56246  
 Kritischer Lastfaktor für die Normalkräfte allein :  
 ETAN : 0.00000  
 Knickspannungslinie : b-Linie  
 Momentenbeiwert nach Tab.11 : 1.30  
 Trägerbeiwert n nach Tab.9 : 2.50  
 Abminderungsfaktor  $K_n$  : 1.00  
 Lambda-Z für  $N_{Ki}$  : 0.0000  
 Kappa-Z : 1.0000  
 Lambda-M fuer My,Ki : 1.0483  
 Kappa-M : 0.7209  
 ++++++  
 Tragsicherheit : 0.889  
 ++++++



**Abbildung 26: Tragsicherheitsnachweis in den Zehntelpunkten**

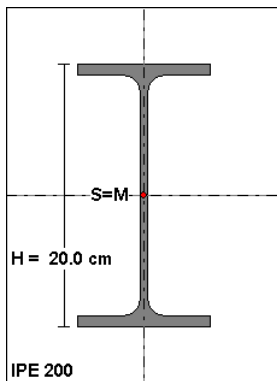


### 3.7 Beispiel 8

Der Träger aus Beispiel 3 wird als Träger auf zwei Stützen ausgebildet und so belastet, daß in Feldmitte das vollplastische Moment

$M_{pl,y,d} = 53.00/1.1 = 48.18 \text{ kNm}$  auftritt.

Dafür errechnet sich eine Streckenlast von  $48.18 \cdot 8/6.90^2 = 8.10 \text{ kN/m}$ .



Der Obergurt wird dabei durchgehend auf Druck beansprucht.

Für diesen Fall ist nach [2], Gleichung (2-3.12) ein Schubfeld mit der Größe

$10.2 \cdot M_{pl,y,d} / k/h = 10.2 \cdot 53.00 / 0.2 = 2703 \text{ kNm/m}$  erforderlich.

Wenn diese Schubfeldsteifigkeit vorhanden ist, sind keine weiteren Nachweise erforderlich.

Es wird untersucht, zu welchem Ergebnis **Drill** kommt.

-----  
Trägerlängen :

-----  
Der Träger hat eine Gesamtlänge von 690.000 cm  
und wurde in 4 Felder unterteilt mit folgenden Feldlängen :  
L( 1) = 172.500 cm  
L( 2) = 172.500 cm  
L( 3) = 172.500 cm  
L( 4) = 172.500 cm

-----  
Lagerungsbedingungen :

	Vertikalver- schiebung w (cm)	Horizontalver- schiebung v (cm)	Verdrehung Teta
Knoten 0	Gelenkige Lagerung	Starre Halterung	Gabellager
Knoten 1	keine Lagerung	keine Lagerung	keine Lagerung
Knoten 2	keine Lagerung	keine Lagerung	keine Lagerung
Knoten 3	keine Lagerung	keine Lagerung	keine Lagerung
Knoten 4	Gelenkige Lagerung	Starre Halterung	Gabellager

-----  
Abstände ez der Lager oder Federn von der Profil-Oberkante,  
Außermittigkeiten ey der vertikalen Lager aus der Symmetrieebene z-z :

	Vertikallager		Seitenlager oder Seitenfeder ky
	ez_LagerZ[cm]	ey_LagerZ[cm]	ez_LagerY[cm]
Knoten 0	20.000	0.000	0.000
Knoten 4	20.000	0.000	0.000

-----  
Federsteifigkeiten in den Feldern :

	Schubfeldsteifigkeit S*[kN·m/m]	Bettung kv[kN/m/m]	Drehbettung kTeta[kN·m/m]
Feld 1-4	2703.000	0.000	0.000

(Federsteifigkeiten konstant am gesamten Träger)

-----  
 Abstände der Schubfelder oder Federn von der Profil-Oberkante in cm :  
 -----

	Schubfeld ez_S*[cm]	Bettung kv ez_kv[cm]
Feld 1-4	0.000	0.000

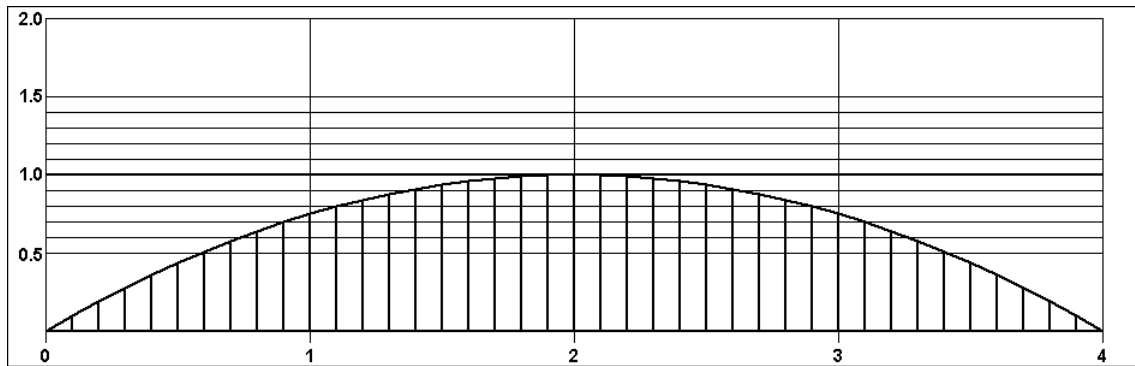
-----  
 Streckenlasten qz und Eigengewicht g in den Feldern :  
 (Das Eigengewicht wirkt stets im Schwerpunkt S)  
 -----

	qz[kN/m]	Abstand von der Profil- Oberkante[cm]	Exzentrizität zur z-Achse [cm]	g[kN/m] in S
Feld 1-4	8.100	8.100	0.00	0.000

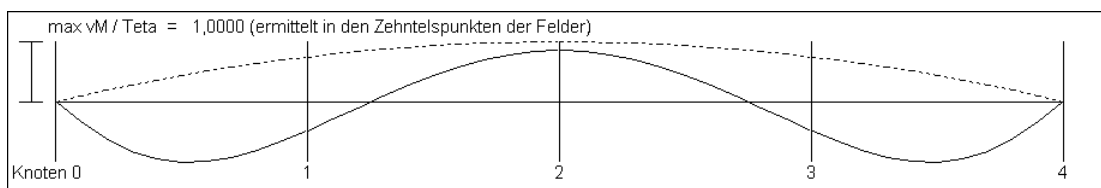
(Streckenlasten konstant am Träger)

-----  
 Tragsicherheitsnachweis des Trägers nach DIN 18800, Teil 1 oder 2  
 Fließgelenknachweis für die Momente My nach Theorie I.O., Teil 1 (757)  
 -----

Profil : Walzprofil IPE 200  
 Sicherheitsbeiwert GammaM : 1.10  
 Npl : 621.4713 kN  
 Mply : 48.1393 kN\*m  
 Mplz\_red : 7.7655 kN\*m  
 (Nach 18800-1 ist Mplz beim Fließgelenknachweis abzumindern.)  
 Die maximale Beanspruchung tritt auf in Feld 2, Schnitt 10 :  
 Abstand x im Träger : 345.00 cm  
 Normalkraft N(x) : 0.0000 kN  
 Moment My(x) : 48.2051 kN\*m  
 Moment Mz(x) : 0.0000 kN\*m  
 Kritischer Lastfaktor für die Querlasten allein :  
 ETAM : 6.564619  
 Kritischer Lastfaktor für die Normalkräfte allein :  
 ETAN : 0.00000  
 Knickspannungslinie : b-Linie  
 Momentenbeiwert nach Tab.11 : 1.30  
 Trägerbeiwert n nach Tab.9 : 2.50  
 Abminderungsfaktor Kn : 1.00  
 Lambda-Z für NKi : 0.0000  
 Kappa-Z : 1.0000  
 Lambda-M fuer My,Ki : 0.0000  
 Kappa-M : 1.0000  
 +-----+  
 Tragsicherheit : 1.001  
 +-----+

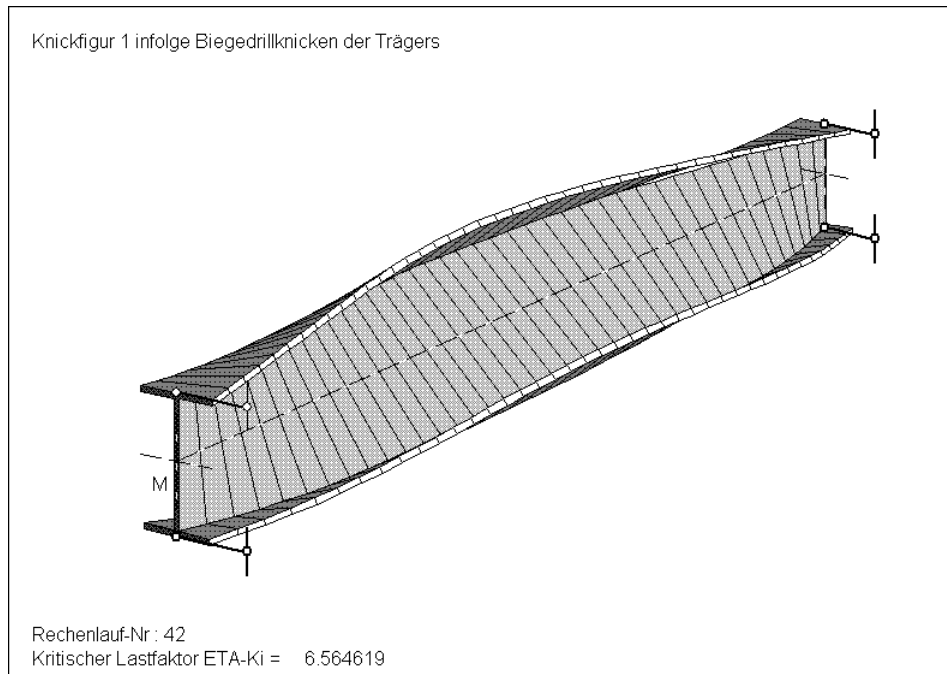


**Abbildung 29: Tragsicherheitsnachweis in den Zehntelpunkten**



**Abbildung 30: Eigenfunktion  $vM$  (\_\_\_) und Teta (...) auf den Maximalwert normiert**

Das Ergebnis bestätigt, daß die Schubfeldsteifigkeit  $10.2 \cdot Mpl, k/h$  bei Balken auf zwei Stützen ausreicht.

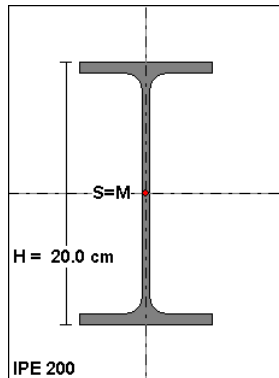


**Abbildung 31: Knickfigur**

### 3.8 Beispiel 9

Der Träger aus Beispiel 8 wird nunmehr als beidseits um die Hauptachse eingespannter Träger nachgewiesen und so belastet, daß an den Auflagern und in Feldmitte das vollplastische Moment  $M_{ply,d} = 53.00/1.1 = 48.18$  kNm auftritt. Die Einspannung wird durch Vorgabe der Einspannmomente 48.18 kNm simuliert.

Dafür errechnet sich eine Streckenlast von  $2 \cdot 48.18 \cdot 8 / 6.90^2 = 16.19$  kN/m.



Für diesen Fall ist nach [1], Bedingung (7) ein Schubfeld mit der Größe 12022 kNm/m erforderlich.

Zusätzlich ist für diesen Fall nach Tabelle 6 eine Drehfeder von  $[5300^2 / (21000 \cdot 142)] \cdot 0.23 \cdot 1.00 = 2.17$  kNm/m erforderlich.

Es wird untersucht, zu welchem Ergebnis "Drill" kommt.

-----  
Trägerlängen :

-----  
Der Träger hat eine Gesamtlänge von 690.000 cm  
und wurde in 4 Felder unterteilt mit folgenden Feldlängen :

L( 1) =	172.500 cm
L( 2) =	172.500 cm
L( 3) =	172.500 cm
L( 4) =	172.500 cm

-----  
Lagerungsbedingungen :

	Vertikalver- schiebung w (cm)	Horizontalver- schiebung v (cm)	Verdrehung Teta
Knoten 0	Gelenkige Lagerung	Starre Halterung	Gabellager
Knoten 1	keine Lagerung	keine Lagerung	keine Lagerung
Knoten 2	keine Lagerung	keine Lagerung	keine Lagerung
Knoten 3	keine Lagerung	keine Lagerung	keine Lagerung
Knoten 4	Gelenkige Lagerung	Starre Halterung	Gabellager

-----  
Abstände ez der Lager oder Federn von der Profil-Oberkante,  
Außermittigkeiten ey der vertikalen Lager aus der Symmetrieebene z-z :

	Vertikallager		Seitenlager oder Seitenfeder ky
	ez_LagerZ[cm]	ey_LagerZ[cm]	ez_LagerY[cm]
Knoten 0	20.000	0.000	0.000
Knoten 4	20.000	0.000	0.000

-----  
Federsteifigkeiten in den Feldern :

	Schubfeldsteifigkeit S*[kN·m/m]	Bettung kv[kN/m/m]	Drehbettung kTeta[kN·m/m]
Feld 1-4	12022.000	0.000	2.170

(Federsteifigkeiten konstant am gesamten Träger)

-----  
 Abstände der Schubfelder oder Federn von der Profil-Oberkante in cm :  
 -----

	Schubfeld ez_S*[cm]	Bettung kv ez_kv[cm]
Feld 1-4	0.000	0.000

-----  
 Streckenlasten qz und Eigengewicht g in den Feldern :  
 (Das Eigengewicht wirkt stets im Schwerpunkt S)  
 -----

	qz[kN/m]		Abstand von der Profil- Oberkante[cm]	Exzentrizität zur z-Achse [cm]	g[kN/m] in S
	Feld- anfang	Feld- ende			
Feld 1-4	16.190	16.190	0.00	0.00	0.000

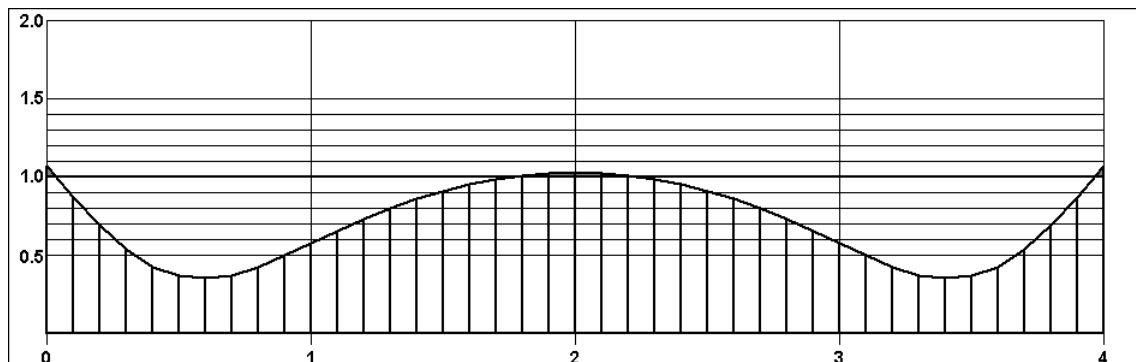
(Streckenlasten konstant am Träger)

-----  
 Einzel-Lastmomente an den Knoten :  
 -----

	Horizontalmoment My[kN·m]	Vertikalmoment Mz[kN·m]	Torsionsmoment Mx[kN·m]
Knoten 0	-48.180	0.000	0.000
Knoten 4	48.180	0.000	0.000

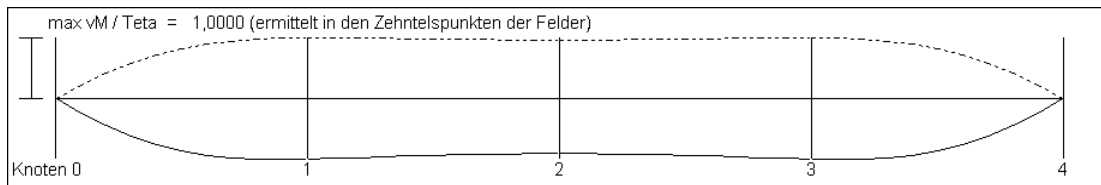
-----  
 Tragsicherheitsnachweis des Trägers nach DIN 18800, Teil 1 oder 2  
 Ersatzstabverfahren für einachsige Biegung ohne N-Kraft nach Gl.(16)  
 -----

Profil : Walzprofil IPE 200  
 Sicherheitsbeiwert GammaM : 1.10  
 Npl : 621.4714 kN  
 Mply : 48.1393 kN\*m  
 Mplz : 9.7336 kN\*m  
 (Eine Abminderung von Mplz ist hier nicht erforderlich.)  
 Die maximale Beanspruchung tritt auf in Feld 1, Schnitt 0 :  
 Abstand x im Träger : 0.00 cm  
 Normalkraft N(x) : 0.0000 kN  
 Moment My(x) : -48.1800 kN·m  
 Moment Mz(x) : 0.0000 kN·m  
 Kritischer Lastfaktor für die Querlasten allein :  
 ETAM : 3.09264  
 Kritischer Lastfaktor für die Normalkräfte allein :  
 ETAN : 0.00000  
 Knickspannungslinie : b-Linie  
 Momentenbeiwert nach Tab.11 : 1.30  
 Trägerbeiwert n nach Tab.9 : 2.50  
 Abminderungsfaktor Kn : 1.00  
 Lambda-Z für NKi : 0.0000  
 Kappa-Z : 1.0000  
 Lambda-M fuer My,Ki : 0.5961  
 Kappa-M : 0.9714  
 ++++++  
 Tragsicherheit : 1.070  
 ++++++

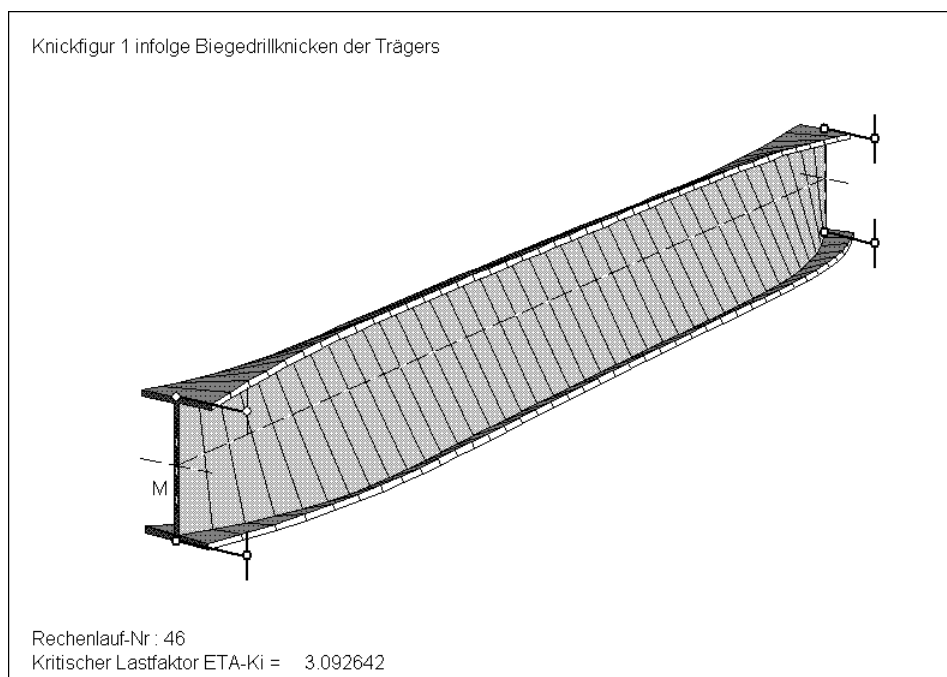


### Abbildung 32: Tragsicherheitsnachweis in den Zehntelpunkten

Ergebnis: die Tragfähigkeit ist um 7% überschritten. **Drill** kommt hier zu einem ungünstigeren Ergebnis als bei Handnachweis nach DIN 18800/2 bei Einhaltung der Bedingungen (7) und (8)



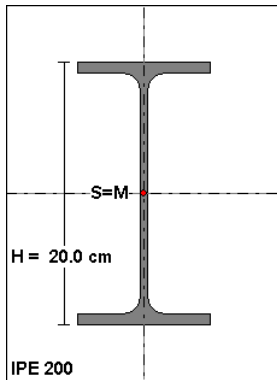
**Abbildung 33: Eigenfunktion  $vM$  (\_\_\_) und  $Teta$  (....) auf den Maximalwert normiert**



**Abbildung 34: Knickfigur**

### 3.9 Beispiel 10

Der Träger aus Beispiel 9 wird nunmehr ohne Drehfeder (2.17 kNm/m) nachgewiesen. System und Belastung sind dieselben wie bei Beispiel 9.



Schubfeld = 12022 kNm/m.

Drehfeder = 0.0

Es wird untersucht, wie sich der Wegfall der Drehfeder auswirkt.

-----  
Federsteifigkeiten in den Feldern :  
-----

	Schubfeldsteifigkeit S*[kN·m/m]	Bettung kv[kN/m/m]	Drehbettung kTeta[kN·m/m]
Feld 1-4	12022.000	0.000	0.000
(Federsteifigkeiten konstant am gesamten Träger)			

-----  
Abstände der Schubfelder oder Federn von der Profil-Oberkante in cm :  
-----

	Schubfeld ez_S*[cm]	Bettung kv ez_kv[cm]
Feld 1-4	0.000	0.000

-----  
Streckenlasten qz und Eigengewicht g in den Feldern :  
(Das Eigengewicht wirkt stets im Schwerpunkt S)  
-----

	qz[kN/m]		Abstand von der Profil- Oberkante[cm]	Exzentrizität zur z-Achse [cm]	g[kN/m] in S
	Feld- anfang	Feld- ende			
Feld 1-4	16.190	16.190	0.00	0.00	0.000
(Streckenlasten konstant am Träger)					

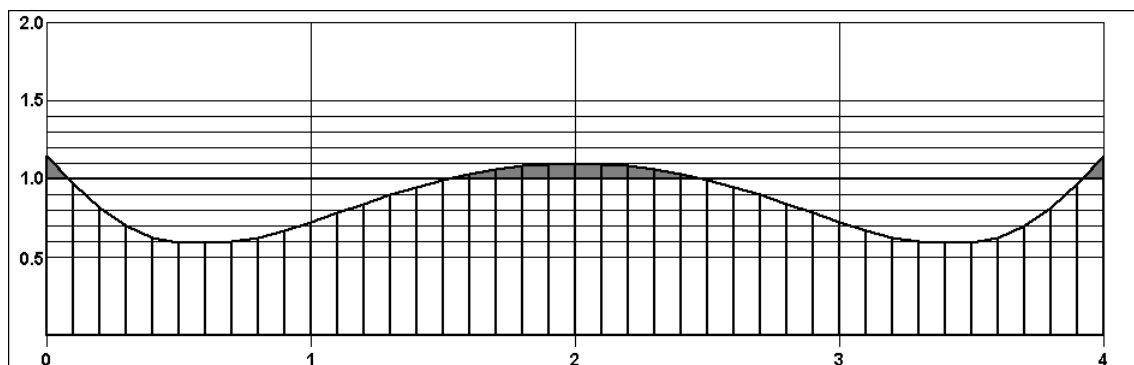
-----  
Einzel-Lastmomente an den Knoten :  
-----

	Horizontalmoment My[kN·m]	Vertikalmoment Mz[kN·m]	Torsionsmoment Mx[kN·m]
Knoten 0	-48.180	0.000	0.000
Knoten 4	48.180	0.000	0.000

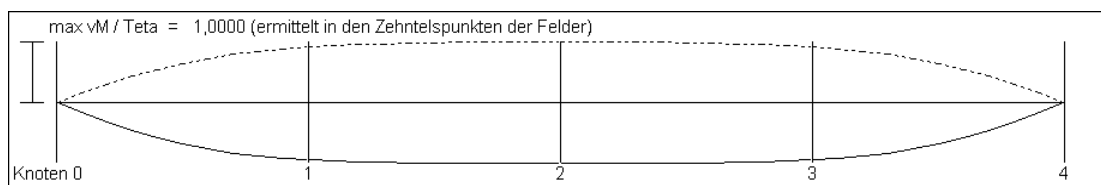
-----  
 Tragsicherheitsnachweis des Trägers nach DIN 18800, Teil 1 oder 2  
 Ersatzstabverfahren für einachsige Biegung ohne N-Kraft nach Gl.(16)  
 -----

Profil : Walzprofil IPE 200  
 Sicherheitsbeiwert  $\gamma_{M}$  : 1.10  
 $N_{pl}$  : 621.4714 kN  
 $M_{ply}$  : 48.1393 kN\*m  
 $M_{plz}$  : 9.7336 kN\*m  
 (Eine Abminderung von  $M_{plz}$  ist hier nicht erforderlich.)  
 Die maximale Beanspruchung tritt auf in Feld 1, Schnitt 0 :  
 Abstand  $x$  im Träger : 0.00 cm  
 Normalkraft  $N(x)$  : 0.0000 kN  
 Moment  $M_y(x)$  : -48.1800 kN\*m  
 Moment  $M_z(x)$  : 0.0000 kN\*m  
 Kritischer Lastfaktor für die Querlasten allein :  
 ETAM : 1.86075  
 Kritischer Lastfaktor für die Normalkräfte allein :  
 ETAN : 0.00000  
 Knickspannungslinie : b-Linie  
 Momentenbeiwert nach Tab.11 : 1.30  
 Trägerbeiwert  $n$  nach Tab.9 : 2.50  
 Abminderungsfaktor  $K_n$  : 1.00  
 Lambda-Z für  $N_{Ki}$  : 0.0000  
 Kappa-Z : 1.0000  
 Lambda-M fuer  $M_y, K_i$  : 0.7685  
 Kappa-M : 0.9094  
 ++++++  
 Tragsicherheit : 1.143  
 ++++++

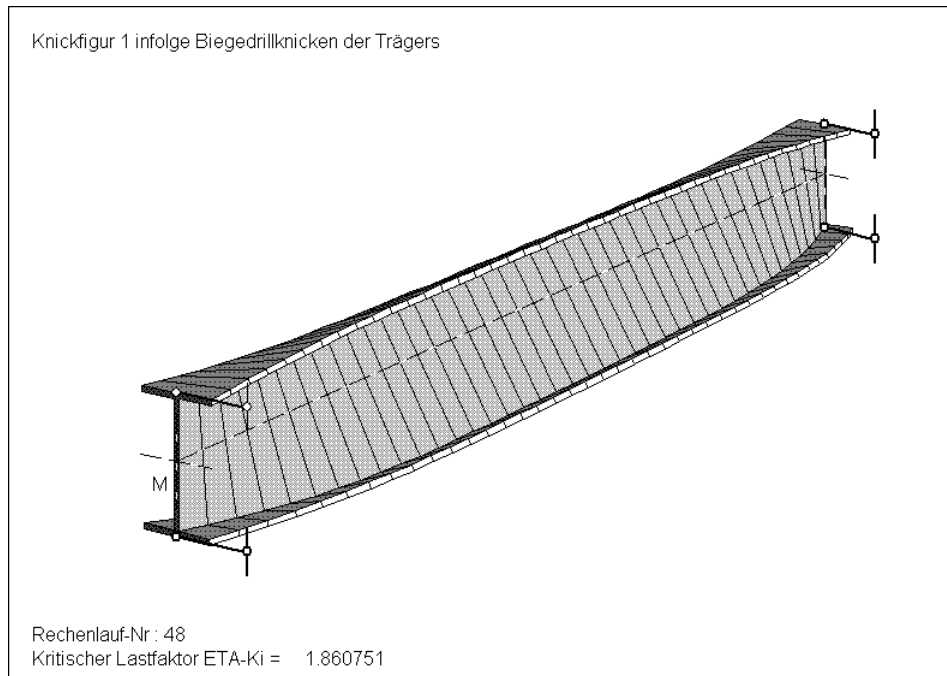
Das Weglassen der Drehfeder mindert die Tragsicherheit von 1.070 auf 1.143



**Abbildung 35: Tragsicherheitsnachweis in den Zehntelpunkten**



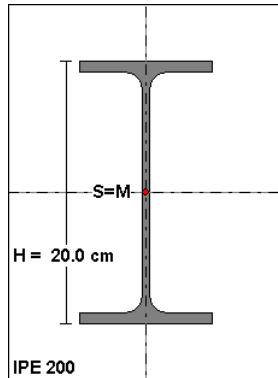
**Abbildung 36: Eigenfunktion  $v_M$  (\_\_\_) und  $Teta$  (...) auf den Maximalwert normiert**



**Abbildung 37: Knickfigur**

### 3.10 Beispiel 11

Der Träger aus Beispiel 9 wird nunmehr mit einer Schubsteifigkeit von 2703 kNm/m = 10.2\*Mpl,k/h nachgewiesen. Die Drehfeder (2.17 kNm/m) wird beibehalten. System und Belastung sind dieselben wie bei Beispiel 9.



Schubfeld = 2703 kNm/m.

Drehfeder = 2.17

Es wird untersucht, wie sich die Verringerung der Schubsteifigkeit auswirkt.

-----  
Federsteifigkeiten in den Feldern :  
-----

	Schubfeldsteifigkeit S*[kN·m/m]	Bettung kv[kN/m/m]	Drehbettung kTeta[kN·m/m]
Feld 1-4	2703.000	0.000	2.170
(Federsteifigkeiten konstant am gesamten Träger)			

-----  
Abstände der Schubfelder oder Federn von der Profil-Oberkante in cm :  
-----

	Schubfeld ez_S*[cm]	Bettung kv ez_kv[cm]
Feld 1-4	0.000	0.000

-----  
Streckenlasten qz und Eigengewicht g in den Feldern :  
(Das Eigengewicht wirkt stets im Schwerpunkt S)  
-----

	qz[kN/m]		Abstand von der Profil- Oberkante[cm]	Exzentrizität zur z-Achse [cm]	g[kN/m] in S
	Feld- anfang	Feld- ende			
Feld 1-4	16.190	16.190	0.00	0.00	0.000
(Streckenlasten konstant am Träger)					

-----  
Einzel-Lastmomente an den Knoten :  
-----

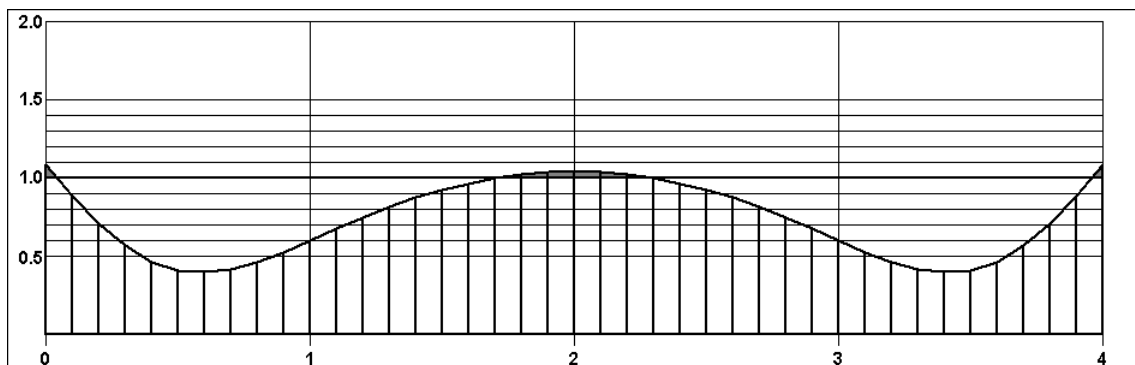
	Horizontalmoment My[kN·m]	Vertikalmoment Mz[kN·m]	Torsionsmoment Mx[kN·m]
Knoten 0	-48.180	0.000	0.000
Knoten 4	48.180	0.000	0.000

-----  
 Tragsicherheitsnachweis des Trägers nach DIN 18800, Teil 1 oder 2  
 Ersatzstabverfahren für einachsige Biegung ohne N-Kraft nach Gl.(16)  
 -----

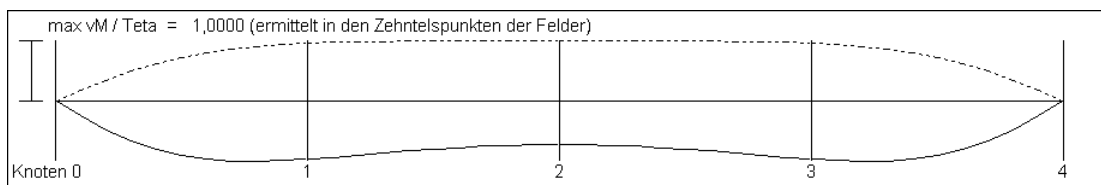
```

Profil : Walzprofil IPE 200
Sicherheitsbeiwert GammaM : 1.10
Npl : 621.4714 kN
Mply : 48.1393 kN*m
Mplz : 9.7336 kN*m
(Eine Abminderung von Mplz ist hier nicht erforderlich.)
Die maximale Beanspruchung tritt auf in Feld 1, Schnitt 0 :
Abstand x im Träger : 0.00 cm
Normalkraft N(x) : 0.0000 kN
Moment My(x) : -48.1800 kN*m
Moment Mz(x) : 0.0000 kN*m
Kritischer Lastfaktor für die Querlasten allein :
ETAM : 2.73626
Kritischer Lastfaktor für die Normalkräfte allein :
ETAN : 0.00000
Knickspannungslinie : b-Linie
Momentenbeiwert nach Tab.11 : 1.30
Trägerbeiwert n nach Tab.9 : 2.50
Abminderungsfaktor Kn : 1.00
Lambda-Z für NKi : 0.0000
Kappa-Z : 1.0000
Lambda-M fuer My,Ki : 0.6338
Kappa-M : 0.9618
+++++
Tragsicherheit : 1.081
+++++
  
```

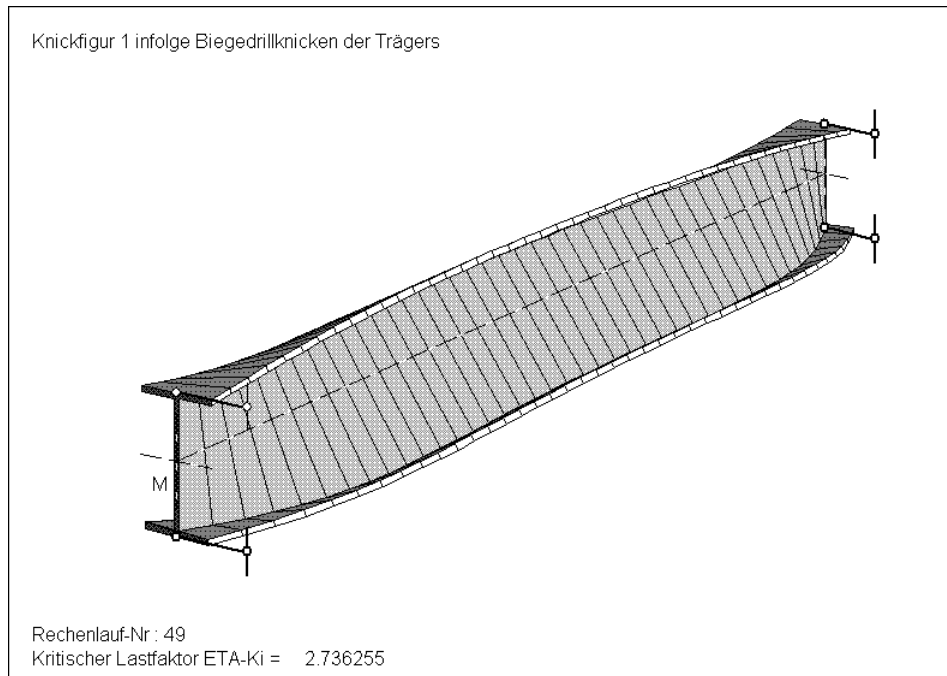
Die Verminderung der Schubsteifigkeit wirkt sich nicht so stark aus, wie das Weglassen der Drehfeder. Die Tragsicherheit vermindert sich von 1.070 auf 1.081



**Abbildung 38: Tragsicherheitsnachweis in den Zehntelpunkten**



**Abbildung 39: Eigenfunktion vM (\_\_\_) und Teta (....) auf den Maximalwert normiert**



**Abbildung 40: Knickfigur**

#### **4 Literatur :**

- [1] DIN 18800, Teil 2, Ausgabe Nov. 1990, Element (304) bis (323)
- [2] Beuth-Kommentare, 3. Auflage 1998, Erläuterungen zu DIN 18800 Teil 1 bis 4, Seite 164 bis 170 und 206
- [3] Lindner, „Der Stahlbau“ 1987, Seite 9–15
- [4] Petersen, „Statik und Stabilität der Baukonstruktionen“, 1. Auflage 1980
- [5] Roik-Carl-Lindner, „Biegetorsionsprobleme gerader dünnwandiger Stäbe“ 1972
- [6] Friemann, Programm Drill, Version K07/2000
- [7] Lindner, „Der Stahlbau“ 1986, Seite 175–179



# **Vorverformungen beim Tragsicherheitsnachweis nach der Spannungstheorie II. Ordnung**

Referent:

**Prof. Dr.-Ing. H. Friemann**



## Inhalt

### 1. Vorverformungen

#### 1.1 Definition von Vorverformungen nach DIN 18800

#### 1.2 Ersatzlasten für Vorkrümmungen $v^*(x)$

#### 1.3 Beispiele zum Ansatz von Vorkrümmungen $v^*(x)$

#### 1.4 Vorverdrehungen $J^*$ - Maximalordinate $J_0$

#### Beispiele

### 1. Vorverformungen

#### 1.1 Definition einer Vorverformung, Vorgaben nach DIN 18800

In DIN 18800-2, Element (201), werden Vorverformungen allgemein definiert: Es sind geometrische „Ersatzimperfektionen“, die sowohl die realen geometrischen Imperfektionen (Vorkrümmungen der Stäbe, ungewollte Lastaußermittigkeiten) als auch strukturelle Imperfektionen (vor allem Eigenspannungen) erfassen sollen. Es ist daher nicht zulässig, die Geometrie eines Tragwerkes zu vermessen und für die rechnerischen Vorverformungen allein die dabei gefundenen Abweichungen der Sollmaße anzusetzen. Die strukturellen Imperfektionen müssen stets in geeigneter Form mit berücksichtigt werden. Der Übergang auf die Ersatzimperfektionen ist dabei der einfachste Weg, der durch Traglastversuche und Traglastberechnungen abgesichert wurde. Die geometrischen Ersatzimperfektionen brauchen mit den geometrischen Randbedingungen des Trägers nicht verträglich zu sein.

Sehr ausführlich werden in DIN 18800-2 die in der Ebene anzusetzenden Vorverformungen behandelt. Dabei ist beachten, daß die dabei definierten „Vorverdrehungen“ Verdrehungen  $\varphi$  der Stabachse in der Trägerebene sind und nicht mit den beim Biegedrillknicken in Einzelfällen anzusetzenden Vorverdrehungen  $\vartheta^*$  identisch sind. Die beim Biegedrillknicken anzusetzenden Vorverformungen werden nur mit einem Satz festgelegt:

*Beim Biegedrillknicken genügt es, lediglich eine Vorkrümmung mit dem Stich  $0,5 \cdot v_0$  anzusetzen.*

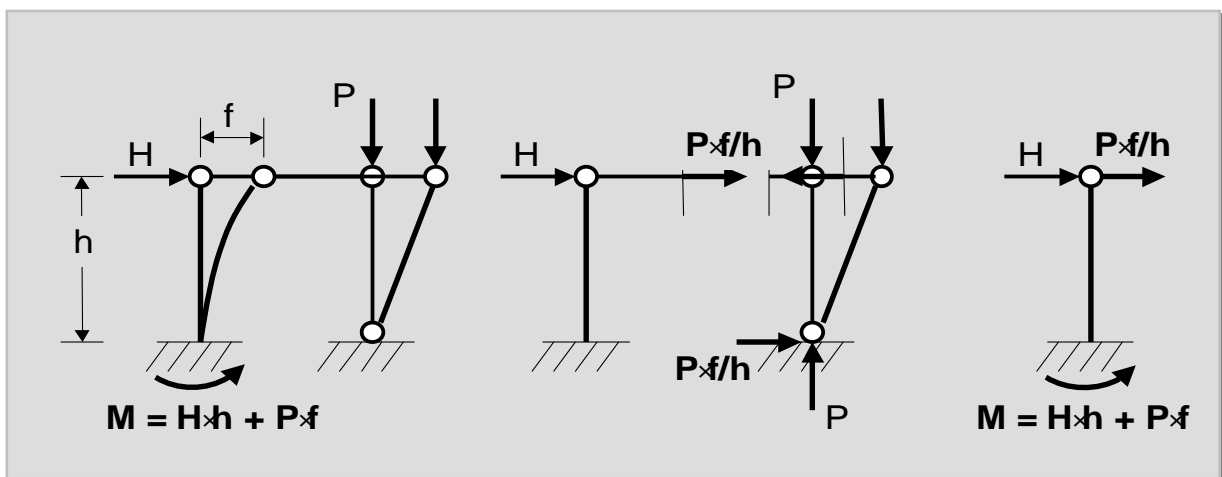
Vorverdrehungen  $\vartheta^*$  werden in DIN 18800 nicht aufgeführt.

Die Größe des Stiches  $v_0$  der seitlichen parabelförmigen Vorkrümmung richtet sich nach der Profilform und ist in DIN 18800-2, Tabelle 3, festgelegt. Durch die Anbindung dieser Werte an die Europäischen Knickspannungslinien wird deutlich, daß es sich um „Ersatzimperfektionen“ handelt, deren Größe durch die im Profil vorhandenen Eigenspannungen mit bestimmt wird.

## 1.2 Ersatzlasten

Ersatzlasten sind fiktive Lasten, die den gleichen Einfluß nach Theorie II.O. haben wie Vorverformungen. Sie sind so anzusetzen, daß sie das Gesamtgleichgewicht des Systems nicht verändern.

Für Vorverformungen  $w_0$  in der Lastebene wurden die entsprechenden Ersatzlasten in DIN 18800-2, Bild 3 und Bild 7, angegeben. Die Herleitung von Ersatzlasten beim Biegedrillknicken ist ein wenig aufwendiger. Die Kenntnis solcher Ersatzlasten ist jedoch hilfreich, um sich die Wirkung einer Vorverformung bei der räumlichen Beanspruchung eines Trägers vorzustellen. Zur Herleitung der Ersatzlasten wird hier die Definition einer Abtriebskraft genutzt.



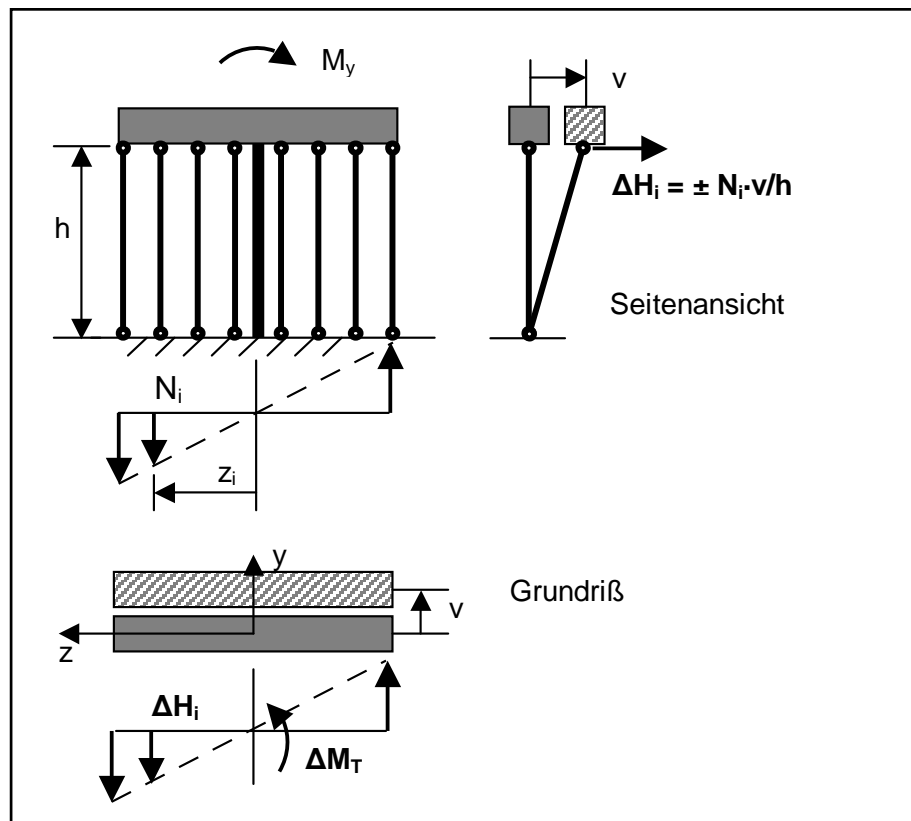
**Bild 1 - Definition einer Abtriebskraft**

Nach Bild 1 ist eine eingespannte Stütze unter einer Horizontallast  $H$  vorgegeben. An diese Stütze angehängt ist eine mit  $P$  belastete Pendelstütze.

Sobald sich der Stützenkopf infolge der Last  $H$  um  $f$  verschiebt, vergrößert sich am **verformten System** (Definition der Theorie II.O.) das Einspannmoment am Stützenfuß um  $P \cdot f$ . Die Vertikallast  $P$  wird mit verschoben und bildet mit der Lagerreaktion am Fuß der Pendelstütze ein Kräftepaar  $P \cdot f$ , das vom Einspannmoment mit aufzunehmen ist.

Betrachtet man die verformte Pendelstütze allein, erkennt man, daß sie in der verformten Lage nur dann im Gleichgewicht sein kann, wenn sie durch die Riegelkraft  $P \cdot f/h$  gehalten wird. Diese Riegelkraft  $\Delta H = P \cdot f/h$  wirkt zusätzlich auf die eingespannte Stütze und wird als **Abtriebskraft** definiert. Damit läßt sich Wirkung der druckbelasteten Pendelstütze auf die Momente nach Theorie II.O. simulieren, indem man die Abtriebskraft  $\Delta H = P \cdot f/h$  wie eine zusätzliche äußere Last am Kopf der eingespannten Stütze ansetzt. Man kann dann das Gleichgewicht am **unverformten System** aufstellen und erhält trotzdem das richtige Ergebnis nach Theorie II.O.

Diese Definition wird zunächst auf ein spezielles Modell, anschließend auf ein Stabelement der Länge  $dx$  übertragen.



**Bild 2 - Starrer Balken, gelagert auf  $n$  Pendelstützen und auf einer biege- und torsionssteifen Mittelstütze**

Durch die Momentenbelastung erhält man folgende Zug- bzw. Druckkraft in einer Pendelstütze  $i$ , siehe Bild 2:

$$N_i = - M_y / I_y \cdot z_i \cdot A_i \quad (\text{Druck positiv})$$

$$\text{mit } I_y = \sum A_i \cdot z_i^2$$

Verschiebt man den starren Balken um die Strecke  $v$  in  $y$ -Richtung, verschieben sich alle Stützenköpfe um die gleiche Strecke. In den druckbeanspruchten Pendelstützen treten somit Abtriebskräfte  $\Delta H_i = N_i \cdot v/h$  in Richtung der Verschiebung  $v$  auf, in den zugbeanspruchten Pendelstützen wirken die inneren Kräfte der Verschiebung  $v$  entgegen und werden als Rückhaltekräfte definiert. Die Verteilung dieser Kräfte in  $z$ -Richtung, siehe Bild 2, zeigt, daß Abtriebs- und Rückhaltekräfte ein Torsionsmoment  $\Delta M_T$  als resultierende Abtriebsgröße hervorrufen.

$$\Delta M_T = \sum \Delta H_i \cdot z_i = - \sum M_y / I_y \cdot z_i^2 \cdot A_i \cdot v/h = - M_y \cdot v/h$$

Dieses Ergebnis wird auf ein Stabelement der Länge  $dx$  übertragen. Die biege- und torsionssteife Innenstütze entspricht der Stabachse, in der die Steifigkeiten des Stabes konzentriert sind. (Jede Statik, die Träger und Stützen durch die Stabachsen symbolisiert, macht

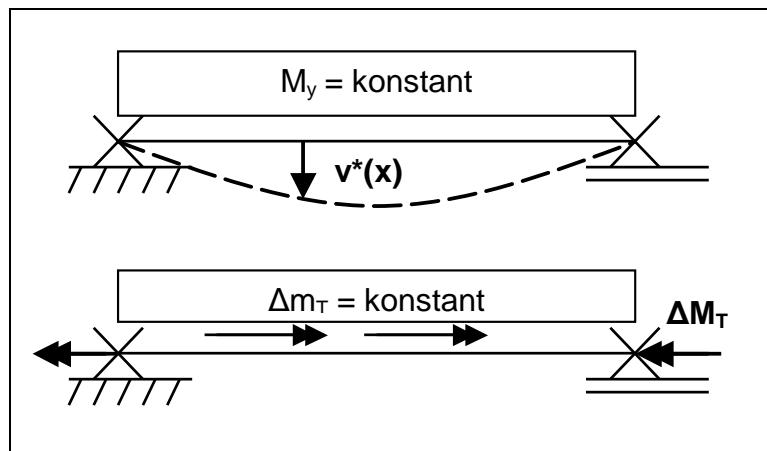
von dieser Vorstellung Gebrauch.) Die Pendelstützen repräsentieren die druck- und zugbeanspruchten Stabfasern des Querschnitts, ihre Steifigkeiten wurden bereits in der Stabachse zusammengefaßt. Die Schrägstellung der Stabfasern im Stabelement wird durch den Zuwachs  $dv$  ausgedrückt. Damit ergibt sich das Abtriebsmoment zu:

$$\Delta M_T = M_y \cdot dv/dx = -M_y \cdot v'$$

Als fiktive Belastung oder Ersatzlast, die das Abtriebsmoment  $\Delta M_T$  hervorruft, ist somit eine Torsionsbelastung vorzugeben:

$$\Delta m_T = +M_y \cdot v''$$

Die gesuchte Ersatzlast für einen Träger unter konstanter Momentenbeanspruchung  $M_y$  und einer parabelförmigen seitlichen Vorkrümmung  $v^*(x)$  ist ein konstantes Torsionsmoment  $\Delta m_T(x)$ , siehe Bild 3.



**Bild 3 - Ersatzlast für einen parabelförmig vorgekrümmten Träger unter  $M_y = \text{konst.}$**

$$v^*(x) = 4f_0(x-x^2)$$

$$\Delta m_T = -8f_0$$

Für die Berechnung eines Trägers nach Theorie II.O. kann somit der Einfluß einer seitlichen Vorkrümmung  $v^*$  durch eine zusätzliche Torsionsbelastung  $\Delta m_T$  erfaßt werden. Allerdings ist nur für den in Bild 3 gezeigten Sonderfall mit  $M_y = \text{konst.}$  auch  $\Delta m_T = \text{konst.}$ , im allgemeinen ergibt sich ein veränderlicher Verlauf von  $\Delta m_T(x)$ . Zu beachten ist ferner, daß an den Enden eines Trägerfeldes, in dem eine Ersatzlast  $\Delta m_T$  angesetzt wird, gleichzeitig zwei Einzelmomente  $\Delta M_T$  vorzugeben sind, die der Ersatzlast  $\Delta m_T$  das Gleichgewicht halten, so daß das Gesamtgleichgewicht des Trägers nicht verändert wird. Ersatzlasten, mit denen Vorverformungen simuliert werden, dürfen in die Summe aller Lagerreaktionen nicht eingehen.

Um für einen Tragsicherheitsnachweis nach der Spannungstheorie II.O. die Vorverformungen einbringen zu können, muß ein Programm vorliegen, daß entweder die direkte Eingabe einer Vorkrümmung  $v^*(x)$  oder die Vorgabe einer beliebigen Torsionsbelastung  $m_T(x)$  gestattet. In DRILL wird direkt mit parabelförmigen Vorkrümmungen  $v^*$  oder Vorverdrehungen  $\vartheta^*$  gearbeitet. In anderen Programmen erfolgt intern eine Umrechnung auf die Ersatzlasten.

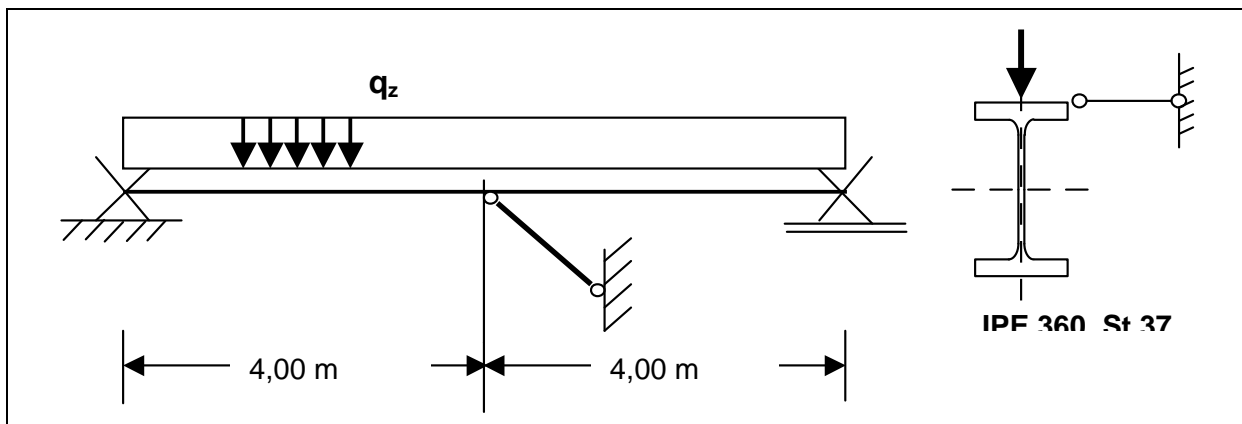
## 1.3 Beispiele

Nachfolgend werden mehrere Beispiele vorgestellt, für die sowohl nach dem Ersatzstabverfahren als auch nach der Spannungstheorie II.O. der Tragsicherheitsnachweis geführt wird. Die Ergebnisse werden miteinander verglichen.

Das Schwergewicht wird dabei auf der Wahl der seitlichen Vorkrümmungen  $v^*$  liegen. Der Aussage in DIN 18800-2, Element (202), „daß die Ersatzimperfektionen sich der zum niedrigsten Knickeigenwert gehörenden Verformungsfigur möglichst gut anpassen sollen“, wird dabei Rechnung getragen.

### Beispiel 1

Gegeben ist ein Einfeldträger unter Gleichstreckenlast  $q_z$  (die Teilsicherheitsbeiwerte  $\gamma_F$  und  $\gamma_M$  sollen bereits in dieser Last enthalten sein). Die Last wirkt auf der Oberkante des Obergurtes. Der Träger ist am Obergurt in Trägermitte durch eine aufliegende Pfette seitlich unverschieblich gehalten.



**Bild 4 - Beispiel 1, System und Belastung**

Es sind zwei Lagerungsfälle für  $w$  zu untersuchen :

- ◆ Gelenkige Lagerung in der Trägerebene an beiden Trägerenden
- ◆ Starre Einspannung in der Trägerebene an beiden Trägerenden.

Rechtwinklig zur Trägerebene bleibt die gelenkige Lagerung in beiden Fällen bestehen.,

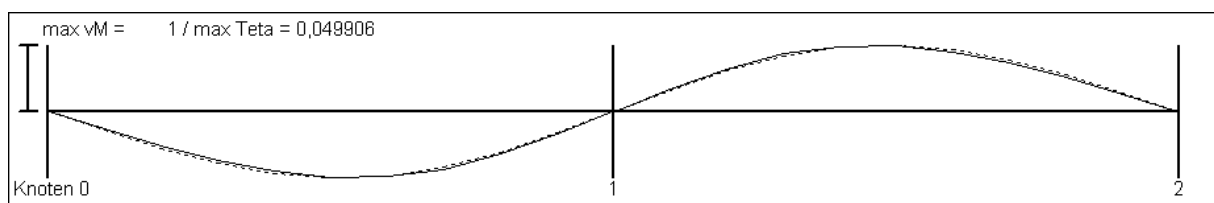
Die folgende Tabelle zeigt das Ergebnis der Berechnung:

Lagerungsfall:	Gelenkige Lagerung	Starre Einspannung
Vorgegebene Streckenlast $q_z$ (kN/m):	27,113	38,331
Kritischer Lastfaktor $\eta_{ki} =$	1,7178	1,6611
Interaktionsnachweis nach dem Ersatzstabverfahren:	1,0	1,0
Knickbiegeline $v(x)$ :	antimetrisch	symmetrisch
zu wählende Vorverformung $v^*(x)$ :	antimetrisch, $L^* = 4$ m	symmetrisch, $L^* = 8$ m
Vorkrümmung: $v_0 = 2/3 \cdot 0,5 \cdot L^*/250$	0,5333 cm	1,0667 cm
max $\sigma_x$	27,863 kN/cm <sup>2</sup>	22,631 kN/cm <sup>2</sup>
Vorkrümmung: $v_0 = 0,5 \cdot L^*/250$	0,8 cm	1,6 cm
Interaktion zur Bildung eines Fließgelenkes:	0,906	****

**Tabelle 1**

**\*\*\*\* - da  $Q_z > Q_{pl,z}/3$  ist, ist der Fließgelenknachweis nicht zulässig**

Für beide Lagerungsfälle  $w$  wurde die Streckenlast so vorgegeben, daß der Interaktionsnachweis nach dem Ersatzstabverfahren genau den Wert 1,0 liefert. Dadurch wird ein Vergleich mit dem Tragsicherheitsnachweis nach der Spannungstheorie möglich.



**Bild 5 - Knickbiegelines  $v$  und  $J$  des in der Ebene gelenkig gelagerten Trägers**

$\frac{3}{4} \frac{3}{4} v_M(x)$ ;  $\times \times \times \times J(x)$

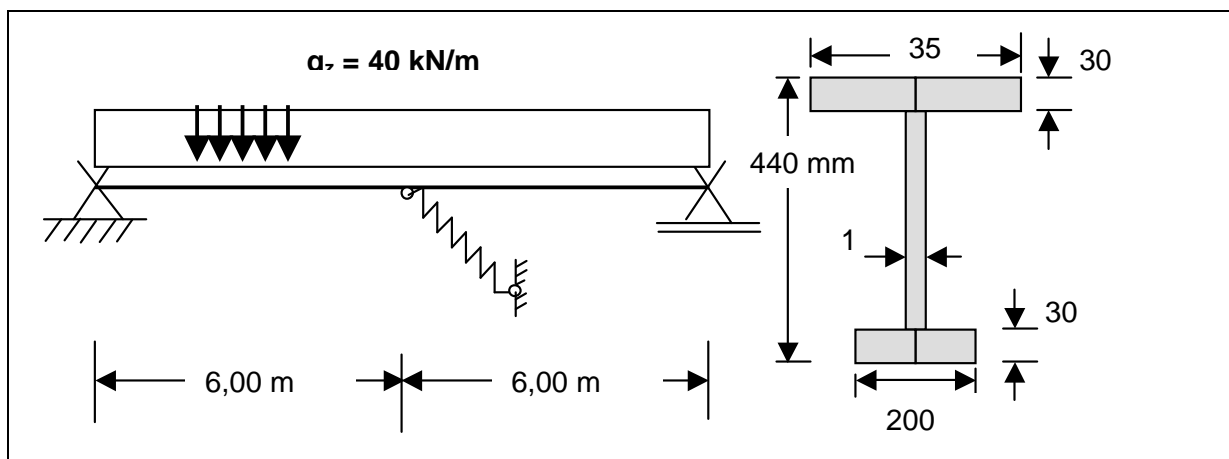
Beim gelenkig gelagerten Träger tritt nur im Obergurt Druck auf. Da dieser Gurt in der Mitte seitlich gehalten ist, knickt er antimetrisch aus. Es ist daher eine zweiwellige antimetrische Vorkrümmung mit dem Stich  $v_0 = 0,5 \cdot 400/250 = 0,80$  cm ( $L^* = 4$  m ist die Bezugslänge) anzusetzen, die beim Spannungsnachweis noch mit  $2/3$  abgemindert werden darf, beim Fließgelenknachweis jedoch in voller Größe beizubehalten ist. Während beim Spannungsnachweis die zulässigen Randspannungen überschritten werden, liegt der Fließgelenknachweis auf der sicheren Seite.



## Beispiel 2

Der Einfeldträger wird in Trägermitte durch eine elastische Feder gehalten, die Feder mit der Steifigkeit  $k_y$  [kN/m] setzt seitlich an der Oberkante des Obergurtes an. Als Last ist eine Gleichstreckenlast  $q_{z,d} = 40$  kN/m vorgegeben, die ebenfalls an der Oberkante des Obergurtes angreift. Der Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_F$  ist in dieser Lastgröße enthalten,  $\gamma_M$  ist beim Tragsicherheitsnachweis noch zu berücksichtigen.

Der einfach symmetrische Querschnitt ist vorgegeben. Werkstoff: St 37.



**Bild 6 – Beispiel 2, System und Belastung**

-----  
 Querschnittsgrößen nach dem Profilmittellinien-Modell :  
 -----

Schwerpunktsabstand von Obergurtmitte	EZ =	16.427 cm
Fläche	A =	226.500 cm**2
Trägheitsmoment	I <sub>y</sub> =	74322.923 cm**4
Trägheitsmoment	I <sub>z</sub> =	12730.281 cm**4
St.Venant-scher Torsionswiderstand	IT =	524.110 cm**4
Schubmittelpunkts-Abstand	ZM =	-9.986 cm
Wölbwiderstand	CM =	2.8442E+0006 cm**6
Querschnittsgröße (ohne 2*ZM)	R <sub>y</sub> =	5.480 cm

-----  
 Vollplastische Schnittgrößen (Gamma\_M = 1.0) - Schichtenmodell :  
 -----

Streckgrenze nach DIN 18800, Teil 1	f <sub>y,k</sub> =	24.000 kN/cm**2
Vollplastisches Moment	M <sub>ply</sub> =	860.760 kN*m
Vollplastisches Moment	M <sub>plz</sub> =	298.035 kN*m
Vollplastisches Moment	M <sub>plw</sub> =	**** kN*m*m
Elastizitätsmodul	E =	21000.000 kN/cm**2
Schubmodul	G =	8100.000 kN/cm**2

Für unterschiedliche Federsteifigkeiten  $k_y$  ist der Tragsicherheitsnachweis nach dem Ersatzstabverfahren und nach der Spannungstheorie II.O. zu führen (der Fließgelenknachweis nach 18800-1, Element (757), ist für diesen Querschnitt nicht zulässig). Außerdem ist die Federkraft zu bestimmen.

Bei der Berechnung ist zu beachten, daß etwa für  $k_y = 3850$  kN/m die Mindeststeifigkeit erreicht wird, die zuvor symmetrische Knickfigur schlägt in die antimetrische Form um. Von dieser Größe der Federsteifigkeit ab bringt eine weitere Erhöhung von  $k_y$  keine Veränderung der Ergebnisse mehr.

Vorverformung  $v^*(x)$ :

Zur Spannungsberechnung nach Theorie II.O. ist eine symmetrische Parabel mit der Ordinate  $v_0 = 0,5 \cdot 2/3 \cdot 1200 \cdot 1/200 = 2,0$  cm anzusetzen (c-Linie). Die Bezugslänge  $L^*$  ist gleich der Stablänge. Ab  $k_y = 3900$  kN/m liegt man jedoch oberhalb der Grenzsteifigkeit, so daß - affin zur antimetrischen Knickfigur - eine antimetrische Vorkrümmung mit der neuen Ordinate  $v_0 = 1,0$  cm anzusetzen ist. Um die Kraft in der seitlichen Feder zu berechnen, muß in einem zweiten Rechenlauf auch für  $k_y > k_{y,min}$  zusätzlich die symmetrische Vorkrümmung gewählt werden.

Trägerbweiwert:  $n = 2,00$

Das Ergebnis der Berechnung zeigt die folgende Tabelle:

$k_y$ [kN/m]	$h_{Ki}$	Ersatzstab- verfahren:	Form der Knick- biegeline	$M_z$ (Träger- mitte) kN·m	$M_w$ (Träger- mitte) kN·m <sup>2</sup>	$\max \sigma_x$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	Feder- kraft $R_y$ [kN]
0	1,5417	1,1643	symmetrisch	-39,37	1,931	24,552	
1000	2,7691	1,0022	symmetrisch	-4,96	0,793	24,384	5,13
2000	3,7861	0,9649	symmetrisch	-0,66	0,656	24,550	5,76
3800	5,3726	0,9426	symmetrisch	+1,77	0,576	24,643	6,13
3900	5,4047	0,9424	antimetrisch			24,649	6,15
4000	5,4047	0,9424	antimetrisch			24,649	6,15

**Tabelle 2**

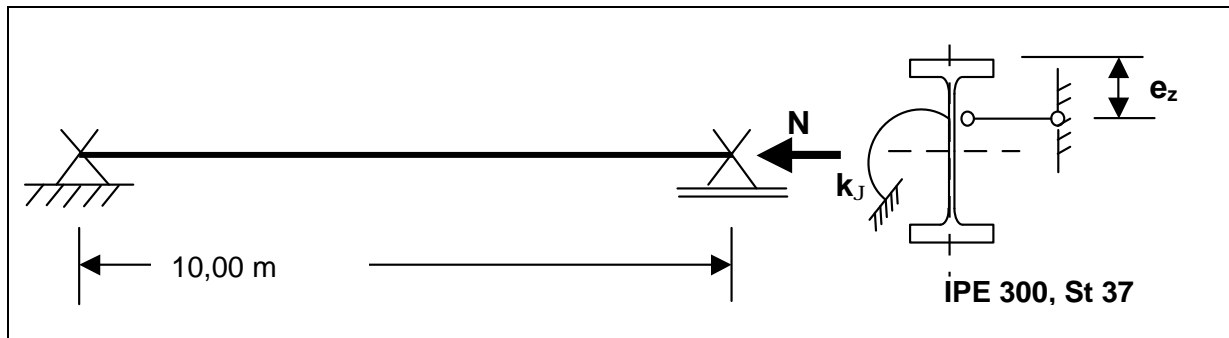
Maßgebend für den Spannungsnachweis ist der Untergurt. Für den Träger mit  $k_y = 0$  ergibt sich ein relativ großes Moment  $M_{z,II.O.} = -39.37$  kN·m, so daß am Untergurt der Außenpunkt in Richtung +y maßgebend wird. Mit zunehmender Federsteifigkeit  $k_y$  vermindert sich das Moment  $M_z$  stark, so daß schon für  $k_y = 1000$  kN/m am Untergurt der Außenpunkt in Richtung -y für  $\max \sigma_x$  maßgebend wird. Daß die Spannungen dort mit weiter zunehmender Federsteifigkeit  $k_y$  noch geringfügig anwachsen, obwohl der Träger im Grunde verstärkt wird, ist darauf zurückzuführen, daß das Biegemoment  $M_y$  stärker zurückgeht als das Wölbmoment  $M_w$  und für  $k_y = 3800$  kN/m sogar positiv wird.

Bei diesem Beispiel führt die Spannungstheorie II.O. zu deutlich ungünstigeren Ergebnissen. Die Grenzspannung von  $f_{y,k}/\gamma_M = 21,818$  kN/cm<sup>2</sup> wird in keinem Fall unterschritten.

Bereits nach Theorie I.O. liegt die maximale Spannung infolge der Gleichstreckenlast  $q_z$  mit  $\max \sigma_x = 23,8$  kN/cm<sup>2</sup> über der zulässigen Grenzspannung. Durch den Einfluß der Theorie II.O. ergibt sich nur noch eine geringe Steigerung der maximalen Spannungen. Nur nach dem Verfahren E-P, wie es beim Ersatzstabverfahren genutzt wird, ist in diesem Fall eine ausreichende Sicherheit nachzuweisen.

### Beispiel 3

Vorgegeben ist ein gelenkig gelagerter Einfeldträger, belastet mit einer konstanten mittigen Normalkraft. Im Abstand  $e_z$  von der Profiloberkante aus ist dieser Träger seitlich durch einen Verband starr gehalten, so daß sich dort eine feste Drehachse einstellt. Zusätzlich ist eine elastische Drehbettung  $k_\vartheta$  vorhanden.



**Bild 7 - Beispiel 3, System und Belastung**

WITTEMANN (1992) behandelt diesen speziellen Lagerungsfall und gibt Formeln an, um die kritische Last  $N_{Ki}$  dieses Trägers zu ermitteln. Ein wichtiger Parameter ist dabei der auf die Drehachse bezogene Wölbwiderstand:

$$C_D = E \cdot C_M + E \cdot I_z \cdot (h/2 - e_z)^2$$

Nach den dort angegebenen Formeln erhält man für das Beispiel nach Bild 7 folgendes Ergebnis:

$$e_z = 3,0 \text{ cm}$$

$$k_\vartheta = 46,368 \text{ kN}\cdot\text{m/m}$$

$$N_{Ki} = 3483,3 \text{ kN}$$

Der Träger versagt auf Biegedrillknicken, die Seitenverschiebungen  $v$  und die Verdrehungen  $\vartheta$  sind miteinander gekoppelt. Interessant ist bei diesem speziellen Lagerungsfall mit einer Drehbettung  $k_\vartheta$ , daß sich eine mehrwellige Knickfigur einstellen kann. Die Zahl  $m$  der Halbwellen hängt von der Stablänge, von der Lage der Drehachse und von der Federsteifigkeit  $k_\vartheta$  ab. Für das hier gewählte Zahlenbeispiel kann die Zahl der Halbwellen mit  $m = 3$  aus einem von WITTEMANN mit veröffentlichten Diagramm abgelesen werden.

Dieses Beispiel soll hier mit DRILL nachgerechnet werden. Gleichzeitig ist die zulässige Grenzlast zu ermitteln. Der Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_M$  ist zu berücksichtigen.

Folgende Fragen zeichnen sich ab:

- ◆ Da in DRILL keine feste Drehachse vorgesehen ist: Wie läßt sie sich realisieren?
- ◆ Hat die zur Berechnung gewählte Felderzahl Einfluß auf das Ergebnis?
- ◆ Welche Vorverformungen sind anzusetzen, um den Tragsicherheitsnachweis nach der Spannungstheorie II.O. zu führen?

Eine feste Drehachse lässt sich durch die Vorgabe seitlicher starrer Halterungen in Höhe der Drehachse simulieren. Dabei spielt jedoch die Felderzahl eine entscheidende Rolle. Wählt man eine zu kleine Felderzahl  $n$ , knickt der Druckstab zwischen den Halterungen um die schwache Achse aus. Es stellt sich mehrwelliges Biegeknicken ein, jedoch kein Biegedrillknicken. Hier wurden 8 Felder gewählt, bei 4 Feldern stellte sich noch Biegeknicken ein. Folgendes Ergebnis wurde für den Achtfeldträger erzielt:

$$N_{Ki} = 3468,7 \text{ kN}$$

Die zweite Möglichkeit, eine feste Drehachse vorzugeben, besteht darin, eine hohe Schubfeldsteifigkeit  $S^*$  in Höhe der Drehachse anzusetzen: Es wurde ein Dreifeldträger gewählt, die feste Drehachse wurde mit der Steifigkeit  $S^* = 100000 \text{ kN}\cdot\text{m}/\text{m}$  simuliert. Für die kritische Last ergab sich:

$$N_{Ki} = 3482,5 \text{ kN}$$

Das Ersatzstabverfahren liefert folgendes Ergebnis für die zulässige Grenzlast:

$$n = 2,5 \text{ (Trägerbeiwert)}$$

Knickspannungslinie  $b$

$$\gamma_M = 1,1$$

$$N_{\text{Grenz}} = 977,4 \text{ kN}$$

Tragsicherheitsnachweis nach der Spannungstheorie II.O.:

Er erfordert den Ansatz einer Vorverformung in ungünstigster Richtung. Wählt man eine **einwellige** Parabel (Bezugslänge  $L^* = 10 \text{ m}$ ) mit dem Stich

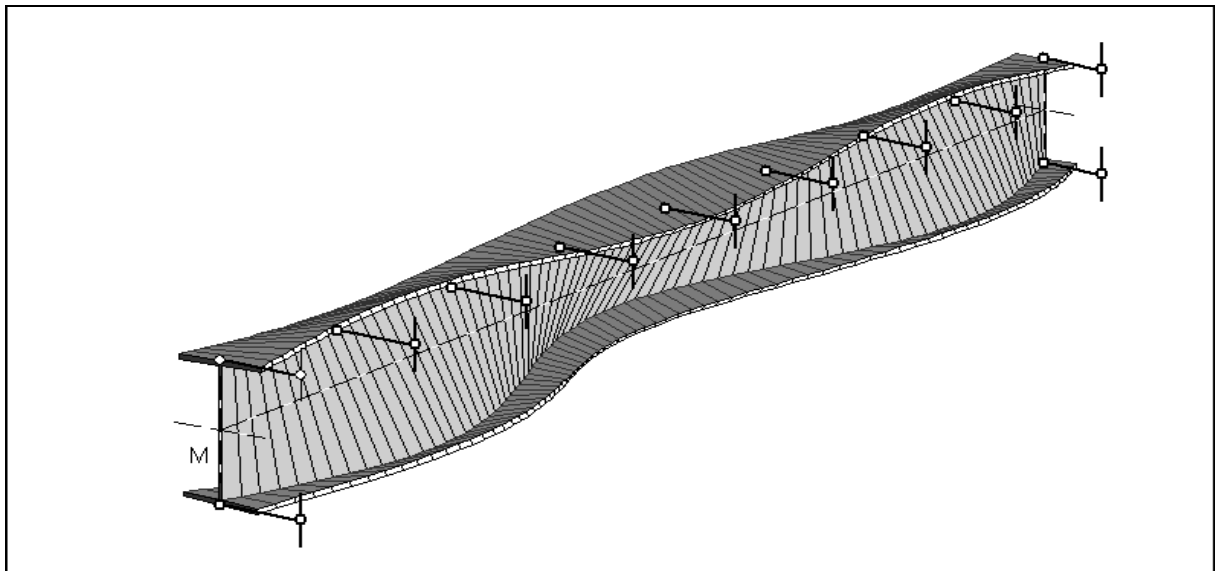
$$v_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1000}{250} = 1,333 \text{ cm},$$

erhält man für die nach dem Ersatzstabverfahren ermittelte Grenzlast von 977,4 kN eine maximale Randspannung von

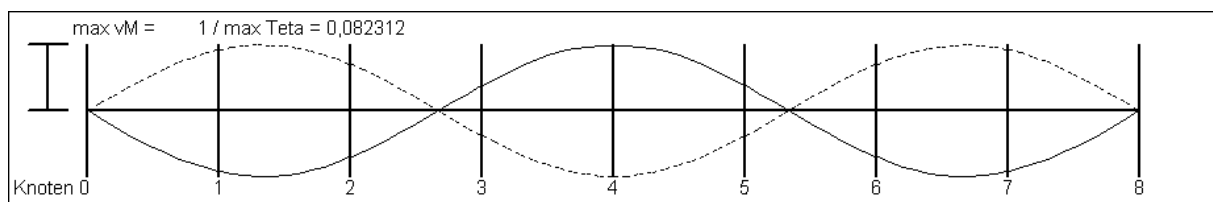
$$\max \sigma_x = 18,60 \text{ kN}/\text{cm}^2,$$

Um die abgeminderte Streckgrenze  $f_{y,d} = 21,818 \text{ kN}/\text{cm}^2$  zu erreichen, könnte die Druckkraft nach diesem Ergebnis auf  $N = 1144,5 \text{ kN}$  gesteigert werden, also fast bis zur vollplastischen Normalkraft von  $N_{pl,d} = 1174,1 \text{ kN}$ .

Dieses Ergebnis setzt jedoch voraus, daß mit der Wahl einer einwelligen Vorkrümmung  $v^*(x)$  der ungünstigste Ansatz gefunden wurde. Um dies zu überprüfen, muß die Knickfigur ermittelt werden, um eine dazu affine Vorverformung wählen zu können. Als Knickfigur stellt sich bei diesem Beispiel jedoch die **dreiwellige** Sinus-Halbwellen ein, wie dies auch nach der Arbeit von WITTEMANN festgestellt wurde. Bild 8 zeigt die nach DRILL ermittelte Knickfigur, Bild 9 den Verlauf der Knickbiegelinien  $v(x)$  und  $\vartheta(x)$ .



**Bild 8 - Knickfigur des Trägers mit seitlichen Halterungen in den Achtelpunkten**



**Bild 9 - Knickbiegelinien  $\frac{3}{4} \frac{3}{4} v_M$  und  $\times \times \times \times \times J$**

Für den Tragsicherheitsnachweis ist daher eine **dreiwellige** Vorkrümmung mit dem Stich

$$v_0 = 1,333 / 3 = 0,444 \text{ cm}$$

anzusetzen, diesmal bezogen auf 1/3 der Trägerlänge. Die kleinere Ordinate  $v_0$  besagt noch nicht, daß dadurch der Einfluß nach Theorie II.O. zurückgeht. Die über die Krümmung  $v^*(x)$  ermittelte Ersatzlast, siehe Bild 3, verstärkt bei der dreiwelligen Parabel die Verdrehungen  $\vartheta$ , so wie sie sich in der Knickfigur einstellen. Für die nach dem Ersatzstabverfahren ermittelte Grenzlast von 977,4 kN erhält man jetzt die maximale Randspannung zu

$$\max \sigma_x = 20,67 \text{ kN/cm}^2,$$

die Druckkraft kann auf maximal  $N = 1028,2 \text{ kN}$  gesteigert werden.

Für den Fließgelenknachweis muß man die Vorverformungsordinate mit  $v_0 = 0,667 \text{ cm}$  ansetzen. Das Ergebnis des Interaktionsnachweises mit **0,843** für  $N = 1028,2 \text{ kN}$  läßt eine nochmalige geringe Steigerung der Last zu.

## 1.4 Vorverdrehungen $J^*$ und das Problem der Größe von $J_0$

Über Vorverdrehungen  $\vartheta^*$  macht DIN 18800 keine Aussage. Es gibt jedoch Beispiele, bei denen der Träger entweder auf Drillknicken versagt oder bei denen die Torsionsverformungen  $\vartheta$  so stark überwiegen, daß der Ansatz einer Vorkrümmung  $v^*(x)$  wenig sinnvoll erscheint. Zur Zeit ist der Statiker in solchen Fällen gezwungen, die Größe der Vorverdrehungen  $\vartheta^*$  eigenverantwortlich festzusetzen, um einen Tragsicherheitsnachweis nach der Spannungstheorie II.O. führen zu können.

Im Kommentar zur DIN 18800 [ LINDNER, SCHEER & SCHMIDT 1998 ] wird unter Kap.3.7.4 zur Berechnung der Anschlußmomente von aussteifenden Bauteilen vorgeschlagen, für die Ersatzvorverdrehung  $\vartheta_0$  ungünstig einen Zahlenwert von  $\vartheta_0 = 0,06$  anzusetzen. RABOLT (1970) wählt in seiner Habilitationsschrift einen Wert von  $\vartheta_0 = L / 1000 \cdot h$ . Oxford (1976) wählte einen größeren Wert von  $\vartheta_0 = L / 500 \cdot h$ .

Nachfolgend soll versucht werden, durch Vergleichsrechnungen Anhaltspunkte für den anzusetzenden Stich  $\vartheta_0$  zu geben, wobei vorausgesetzt wird, daß auch  $\vartheta^*(x)$  in Form einer Parabel vorgegeben wird. Bei den nachfolgenden drei Beispielen wird derjenige Stich  $\vartheta_0$  ermittelt, der bei einem vorverdrehen Träger auf die gleiche Grenzlast nach Theorie II.O. führt wie bei einem vorgekrümmten Träger unter dem maßgebenden Stich  $v_0$ .

### Beispiel 4

System : Einfeldträger mit einer Länge von  $L = 10,0$  m. Beidseitig gabelgelagert.  
 Profil: IPE 360, Werkstoff St 37  
 Belastung: Konstante Streckenlast  $q_{z,d}$  auf dem Obergurt (die Teilsicherheitsbeiwerte  $\gamma_F$  wurden eingerechnet). Der Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_M$  ist noch auf der Werkstoffseite zu berücksichtigen.

Für diesen Träger werden die zulässigen Grenzlasten  $q_{z,R,d}$  nach dem Ersatzstabverfahren und nach der Spannungstheorie II.O. berechnet. Dabei wird einmal das Grenzmoment für den Fall ermittelt, daß die maximale Randspannung genau die Streckgrenze  $f_{y,d}$  erreicht, wobei die Vorkrümmungen  $v_0$  um 2/3 abgemindert werden. Im zweiten Fall wird die Vorkrümmung in voller Größe angesetzt, die Grenzlast wird iterativ aus der Bedingung ermittelt, daß sich das 1. Fließgelenk einstellt. Als Interaktionsbedingung wird die in DIN 18800-1, Element (757), angegebene Formeln benutzt.

#### Ersatzstabverfahren:

$$n = 2,50$$

Knickspannungslinie b

$$\eta_{Ki} = 1,1286$$

$$q_{z,R,d} = 5,856 \text{ kN/m}$$

#### Spannungstheorie II.O., Spannungsnachweis:

$$v_0 = 0,5 \cdot L / 250 \cdot 2/3 = 0,5 \cdot 1000 / 250 \cdot 2/3 = 1,33 \text{ cm (einwellig)}$$

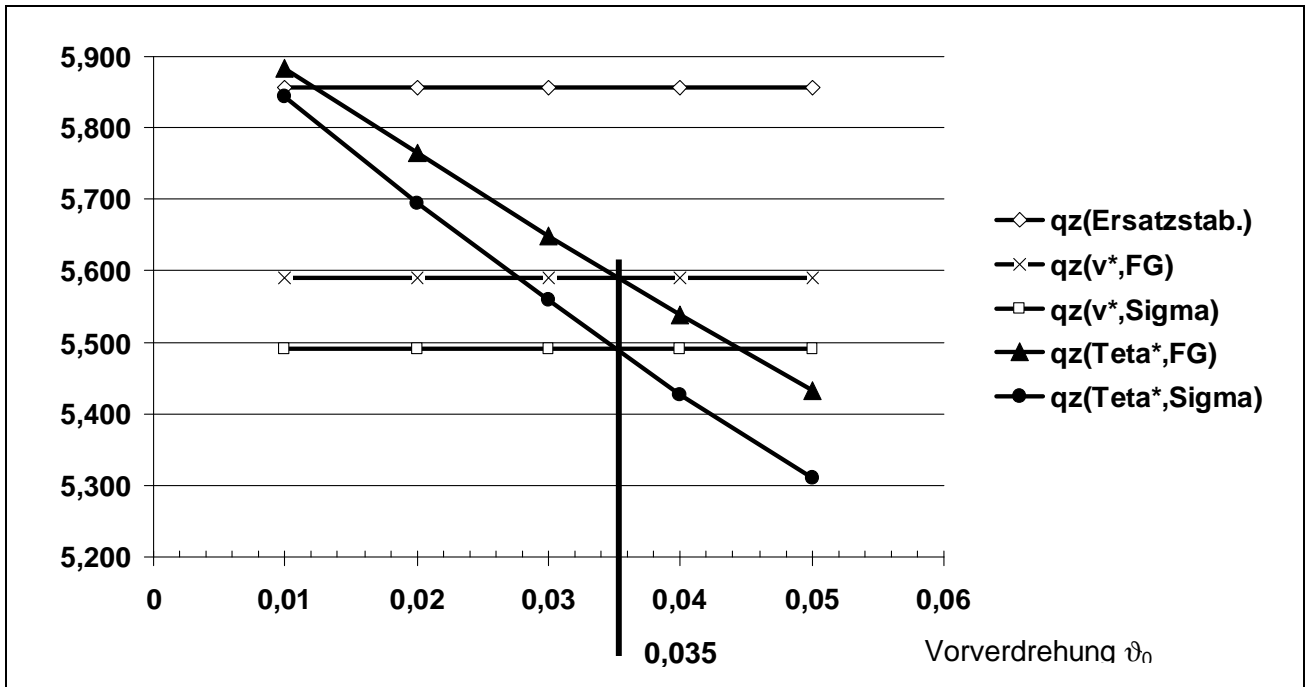
$$\max \sigma_x = f_{y,k} / 1,10 = 21,818 \text{ kN/cm}^2 \text{ wird erreicht für } q_{z,R,d} = 5,490 \text{ kN/m}$$

Spannungstheorie II.O., Fließgelenknachweis:

$$v_0 = 0,5 \cdot L/250 = 2,00 \text{ cm}$$

Das Fließgelenk stellt sich ein für  $q_{z,R,d} = 5,590 \text{ kN/m}$

Bild 10 zeigt das Ergebnis der Iteration der Grenzlaster  $q_{z,R,d}$  für verschiedene Stiche  $\vartheta_0$  der parabelförmigen Vorverdrehungen  $\vartheta^*(x)$ :



**Bild 10 - Grenzlaster  $q_{z,R,d}$  in Abhängigkeit von der Vorverdrehung  $J^*$  - Beispiel 4**

- $q_z(\text{Ersatzstab.})$  - Anwendung des Ersatzstabverfahrens
- $q_z(v^*,FG)$  - Erreichen des 1. Fließgelenkes, Vorkrümmung  $v^*$
- $q_z(v^*,Sigma)$  - Erreichen der Streckgrenze, Vorkrümmung  $2/3 \cdot v^*$
- $q_z(Teta^*,FG)$  - Erreichen des 1. Fließgelenkes, Vorverdrehung  $J^*$
- $q_z(Teta^*,Sigma)$  - Erreichen der Streckgrenze, Vorverdrehung  $2/3 \cdot J^*$

Die drei Geraden in Bild 10 entsprechen den Grenzlaster, die nach dem Ersatzstabverfahren und nach der Spannungstheorie ermittelt wurden. Dabei wurde einmal die maximale Randspannung, bei der mittleren Geraden das Erreichen eines Fließgelenkes als Kriterium genutzt. Als Vorverformung wurde die parabelförmige Vorkrümmung  $v^*$  angesetzt.

Die zwei Kurven entsprechen den nach der Spannungstheorie II.O. ermittelten Grenzlaster mit den zwei gleichen Kriterien, wobei jetzt jedoch eine parabelförmige Vorverdrehung  $\vartheta^*$  mit dem jeweiligen Stich  $\vartheta_0$  vorgegeben wurde.

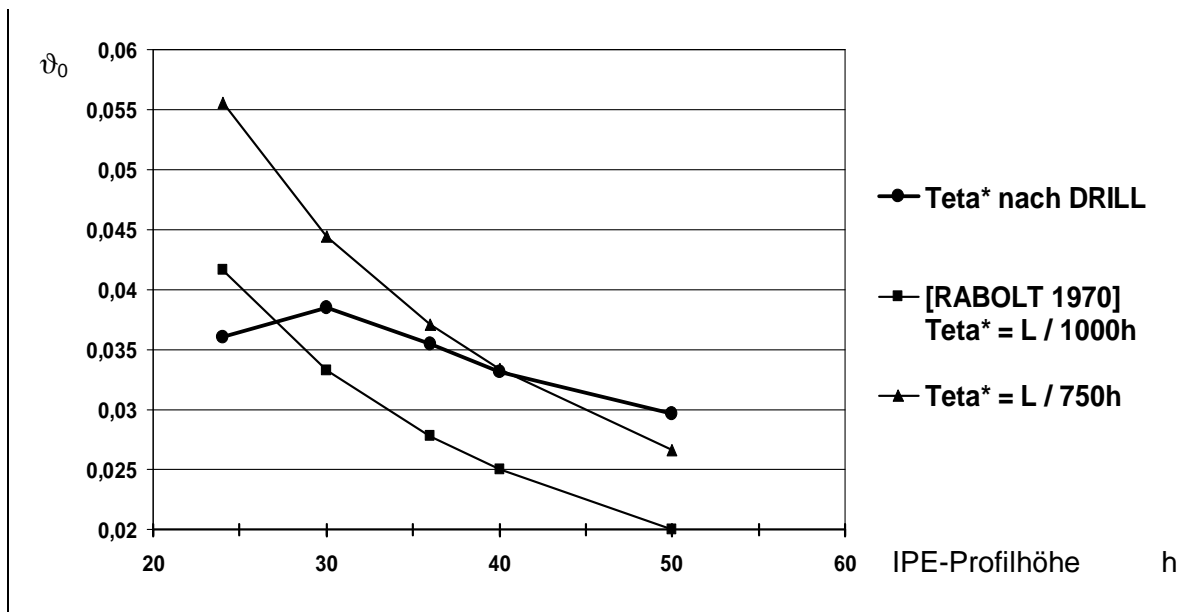
Etwa für einen Stich der Vorverdrehung von  $\vartheta_0 = 0,035$  ergeben sich sowohl über das Kriterium von  $\max \sigma_x = f_{y,d}$  als auch über das erste Fließgelenk im Träger die gleichen Grenzlaster:

Vergleich  $v_0 \rightarrow \vartheta_0$ :  $\vartheta_0 = 0,035$

RABOLT (1970):  $\vartheta_0 = 1000 / 1000 \cdot 36 = 0,028$

Kommentar zur DIN :  $\vartheta_0 = 0,06$

Um die von Rabolt (1970)] vorgeschlagene Größe von  $\vartheta_0$  weiterhin zu überprüfen, wurde das gleiche Beispiel 4 nochmals mit unterschiedlichen Profilen gerechnet, siehe Bild 11. Dabei wurde zunächst für alle Träger mit der gleichen Vorkrümmung von  $v_0 = 2,00$  cm die Grenzlast beim Einspringen des ersten Fließgelenkes ermittelt. Anschließend wurde der Maximalstich  $\vartheta_0$  bestimmt, der auf die gleiche Grenzlast führt.



**Bild 11 - Vergleich der nach DRILL ermittelten Vorverdrehungen  $\max J^* = J_0$  mit dem von RABOLT vorgeschlagenen Wert für einen Einfeldträger unter Gleichstreckenlast**

Man erkennt, daß der von RABOLT vorgeschlagene Wert für  $\vartheta_0$  bei diesem Beispiel zu günstig liegt. Eine Erhöhung dieses Wertes auf  $L / 750 \cdot h$  ergibt vor allem bei den größeren Profilen eine bessere Übereinstimmung. Allerdings hat die nach DRILL ermittelte Bezugskurve einen anderen Verlauf, so daß die Formel nach RABOLT mit den Größen  $L$  und  $h$  als Bezugswerten insgesamt fraglich erscheint. Außerdem ist bei diesem Vergleich zu beachten, daß er nur für einen Einfeldträger unter Gleichstreckenlast vorgenommen wurde und nur für die IPE-Profilreihe.

## Beispiel 5

System : Einfeldträger mit einer Länge von  $L = 6,0$  m. Beidseitig gabelgelagert.  
 Profil: IPE 300, Werkstoff St 37  
 Belastung: Konstantes Moment  $M_{y,d}$  (die Teilsicherheitsbeiwerte  $\gamma_F$  wurden eingerechnet).  
 Der Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_M$  ist noch auf der Werkstoffseite zu berücksichtigen.

Die Ermittlung der zulässigen Grenzmomente  $M_{y,R,d}$  nach dem Ersatzstabverfahren und nach der Spannungstheorie II.O. erfolgt unter den gleichen Bedingungen wie beim Beispiel 4. Anschließend werden die Grenzmomente für unterschiedliche Vorverdrehungen  $\vartheta_0$  berechnet und den für eine Vorkrümmung  $v_0$  ermittelten Werten gegenübergestellt, siehe Bild 12.

### Ersatzstabverfahren:

$$n = 2,50$$

$$\text{Knickspannungslinie } b$$

$$\eta_{Ki} = 1,21375$$

$$M_{y,R,d} = 74,538 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

### Spannungstheorie II.O., Spannungsnachweis:

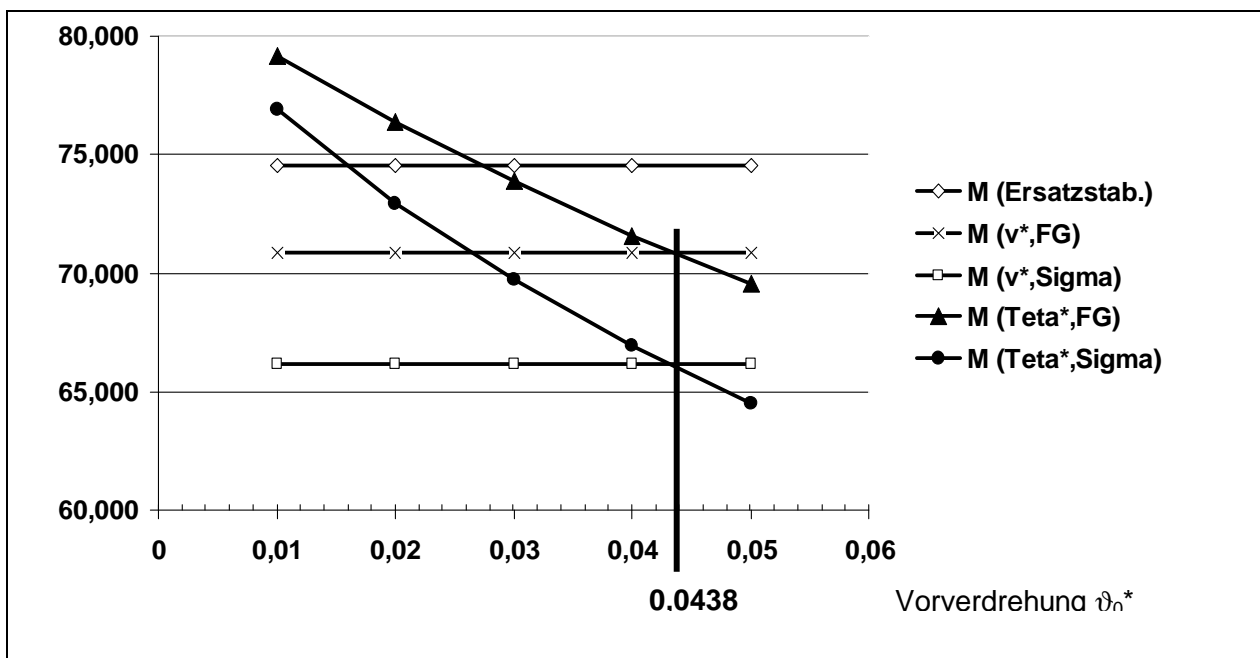
$$v_0 = 0,5 \cdot L / 250 \cdot 2/3 = 0,5 \cdot 600 / 250 \cdot 2/3 = 0,80 \text{ cm (einwellig)}$$

$$\max \sigma_x = f_{y,k} / 1,10 = 21,818 \text{ kN/cm}^2 \text{ wird erreicht für } M_{y,R,d} = 66,190 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

### Spannungstheorie II.O., Fließgelenknachweis:

$$v_0 = 0,5 \cdot L / 250 = 1,20 \text{ cm}$$

Das Fließgelenk stellt sich ein für  $M_{y,R,d} = 70,848 \text{ kN}\cdot\text{m}$



**Bild 12 - Grenzmomente  $M_{y,R,d}$  in Abhängigkeit von der Vorverdrehung  $J^*$  - Beispiel 5**

- $M$  (Ersatzstab.) - Anwendung des Ersatzstabverfahrens
- $M$  ( $v^*$ , FG) - Erreichen des 1. Fließgelenkes, Vorkrümmung  $v^*$
- $M$  ( $v^*$ , Sigma) - Erreichen der Streckgrenze, Vorkrümmung  $2/3 \times v^*$
- $M$  (Teta\*, FG) - Erreichen des 1. Fließgelenkes, Vorverdrehung  $J^*$
- $M$  (Teta\*, Sigma) - Erreichen der Streckgrenze, Vorverdrehung  $2/3 \times J^*$

Etwa für  $\vartheta_0 = 0,0438$  erhält man die gleichen Grenzlasten wie unter der Vorkrümmung  $v_0$ . Zum Vergleich:

$$\vartheta_0 = 600 / 1000 \cdot 30 = 0,02$$

## Beispiel 6

- System : Einfeldträger mit einer Länge von  $L = 10,0$  m. Beidseitig gabelgelagert. Der Träger ist zusätzlich in den Viertelpunkten seitlich am Obergurt durch Pfetten starr gegen Verschiebungen  $v$  gehalten.
- Profil: IPE 300, Werkstoff St 37
- Belastung: Konstante Streckenlast  $q_{z,d}$  auf dem Obergurt (die Teilsicherheitsbeiwerte  $\gamma_F$  wurden eingerechnet). Der Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_M$  ist noch auf der Werkstoffseite zu berücksichtigen.

Die Berechnung der Grenzlasten  $q_{z,R,d}$  erfolgt unter den gleichen Bedingungen wie bei den vorherigen Beispielen.

### Ersatzstabverfahren:

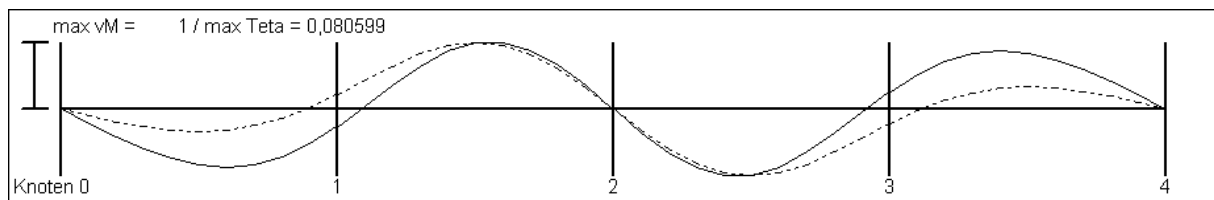
$$n = 2,50$$

Knickspannungslinie  $b$

$$\eta_{Ki} = 3,1724$$

$$q_{z,R,d} = 10,65 \text{ kN/m}$$

Die Vorverformungen werden in etwa affin zur Knickbiegelineie, Bild 13, angesetzt. Die Verschiebungen  $v_M$  des Schwerpunktes und auch die Verdrehungen  $\vartheta$  sind vierwellig, gehen aber in den Knoten 1 und 3 nicht genau durch den Nullpunkt. Trotzdem wird für die Vorverformungen jeweils der vierwellige Sinus vorgegeben.



**Bild 13 - Knickbiegelineien des Beispiels 6**

$\frac{3}{4} \frac{3}{4} v_M$  und  $\times \times \times \times \times J$

Spannungstheorie II.O., Spannungsnachweis:

$$v_0 = \pm 0,5 \cdot L_1 / 250 \cdot 2/3 = \pm 0,5 \cdot 250 / 250 \cdot 2/3 = \pm 0,33 \text{ cm}$$

Die Vorkrümmung wird vierwellig über die Trägerlänge angesetzt.

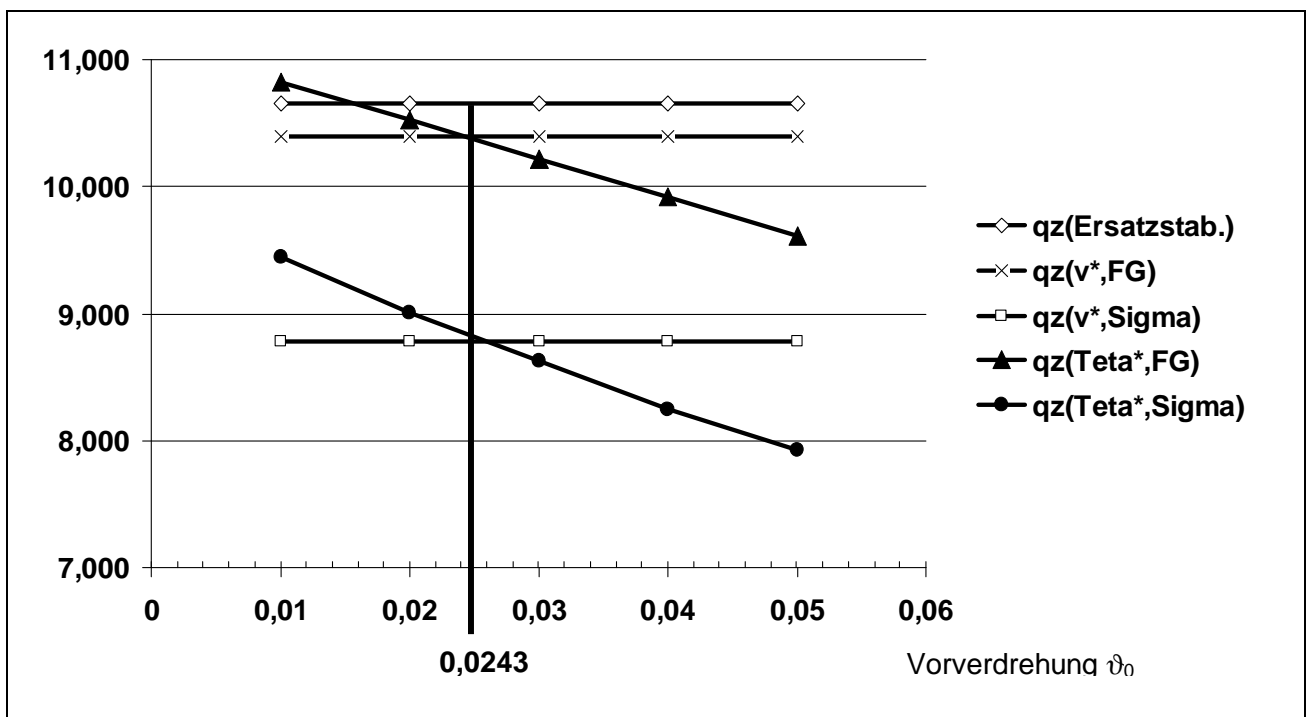
$$\max \sigma_x = f_{y,k} / 1,10 = 21,818 \text{ kN/cm}^2 \text{ wird erreicht für } q_{z,R,d} = 8,78 \text{ kN/m}$$

Spannungstheorie II.O., Fließgelenknachweis:

$$v_0 = 0,5 \cdot L_1 / 250 = 0,50 \text{ cm}$$

Das Fließgelenk stellt sich ein für  $q_{z,R,d} = 10,40 \text{ kN/m}$

Bild 14 zeigt wiederum das Ergebnis der Grenzlaster für eine Vorverdrehung  $\vartheta^*$  im Vergleich zu den für eine Vorkrümmung  $v^*$  ermittelten Grenzlaster. Dabei wurde auch für die Vorverdrehung  $\vartheta^*(x)$  die vierwellige Parabel angesetzt.



**Bild 14 - Grenzlaster  $q_{z,R,d}$  in Abhängigkeit von der Vorverdrehung  $J^*$**

- $q_z(\text{Ersatzstab.})$  - Anwendung des Ersatzstabverfahrens
- $q_z(v^*, \text{FG})$  - Erreichen des 1. Fließgelenkes, Vorkrümmung  $v^*$
- $q_z(v^*, \text{Sigma})$  - Erreichen der Streckgrenze, Vorkrümmung  $2/3 \cdot v^*$
- $q_z(\text{Teta}^*, \text{FG})$  - Erreichen des 1. Fließgelenkes, Vorverdrehung  $J^*$
- $q_z(\text{Teta}^*, \text{Sigma})$  - Erreichen der Streckgrenze, Vorverdrehung  $2/3 \cdot J^*$

Etwa für  $\vartheta_0 = 0,0243$  erhält man die gleichen Grenzlaster wie unter der maßgebenden vierwellig Vorkrümmung  $v_0 = 0,50 \text{ cm}$ . Zum Vergleich:

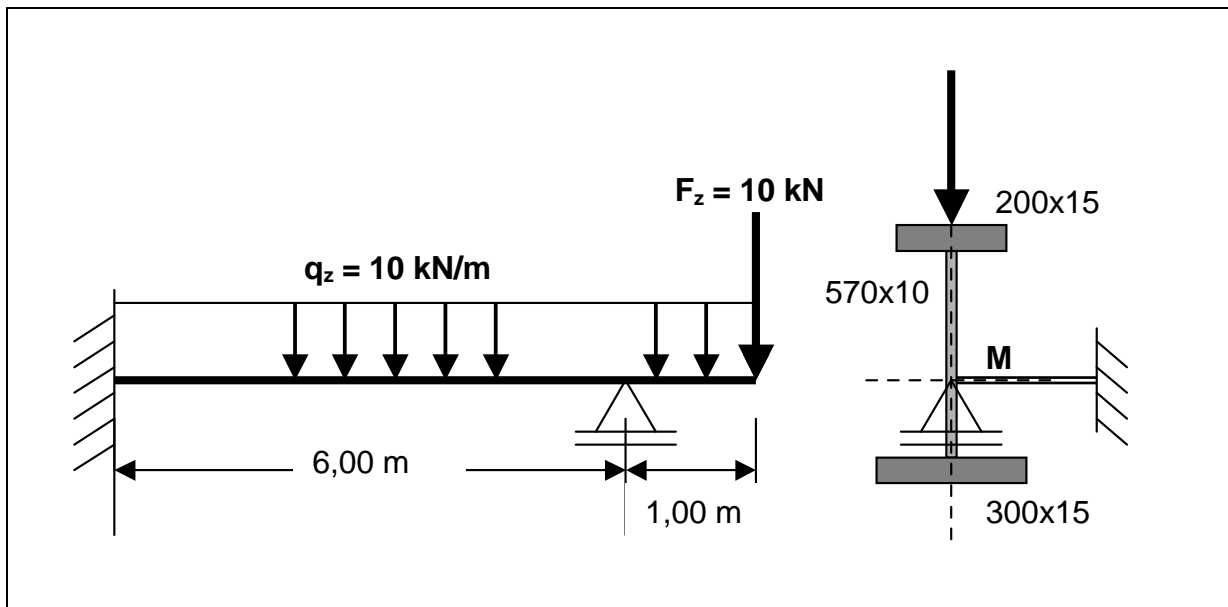
$$\vartheta_0 = 250 / 1000 \cdot 30 = 0,0083$$

**Als Fazit kann man festhalten:**

Ein zufriedenstellender Vorschlag für die Größe einer anzusetzenden Ersatzvorverdrehung  $\vartheta^*(x)$  liegt noch nicht vor. In Übereinstimmung mit der Anbindung der Vorkrümmungsordinaten  $v_0$  an die Europäischen Knickspannungslinien müßte dies auch bei den Vorverdrehungen  $\vartheta_0$  der Fall sein. Die Ersatzlast zu einer Vorverdrehung  $\vartheta^*(x)$  ist eine Streckenlast  $\Delta q_z$ , die nicht wie  $\Delta m_T$  (siehe Bild 3) von  $M_y$ , sondern von  $Q_z$  und vor allem von der Streckenlast  $q_z$  beeinflußt wird. Daraus wird deutlich, daß der Einfluß der verschiedenen Vorverformungen auf die rechnerische Tragfähigkeit auch von der Belastung abhängt [FRIEMANN & STROETMANN 1998]. Insgesamt besteht beim Ansatz von Vorverformungen für Biegedrillknicknachweise noch großer Klärungsbedarf.

**Beispiel 7**

Vorgegeben ist ein Einfeldträger mit Kragarm, der Querschnitt ist einfach symmetrisch:



**Bild 15 - System und Belastung**

Querschnittsgrößen:

-----  
 Profiltyp : Einfachsymmetrisches T-Profil (ProfilNr : 2)  
 -----

Gesamthöhe des Profils	H =	60.000 cm
Stegdicke	Tl =	1.000 cm
Obergurtbreite	BO =	20.000 cm
Obergurtdicke	TO =	1.500 cm
Untergurtbreite	BU =	30.000 cm
Untergurtdicke	TU =	1.500 cm

-----  
 Querschnittsgrößen nach dem Profilmittellinien-Modell :  
 -----

Schwerpunktsabstand von Obergurtmitte	EZ =	32.537 cm
---------------------------------------	------	-----------

Fläche	A =	133.500	cm**2
Trägheitsmoment	Iy =	79422.759	cm**4
Trägheitsmoment	Iz =	4379.750	cm**4
St.Venant-scher Torsionswiderstand	IT =	75.750	cm**4
Schubmittelpunkts-Abstand	ZM =	12.592	cm
Wölbwiderstand	CM =	2.6400E+0006	cm**6
Querschnittsgröße (ohne 2*ZM)	Ry =	-4.498	cm
Widerstandsmoment fuer den oberen Rand	WyO =	2386.034	cm**3
Widerstandsmoment fuer den unteren Rand	WyU =	2973.134	cm**3

-----  
 Vollplastische Schnittgrößen (Gamma\_M = 1.0) - Schichtenmodell :  
 -----

Streckgrenze nach DIN 18800, Teil 1	fy,k =	24.000	kN/cm**2
Vollplastische Normalkraft	Npl =	3168.000	kN
Vollplastisches Moment	Mply =	707.940	kN*m
Vollplastisches Moment	Mplz =	117.000	kN*m
Vollplastisches Moment	Mplw =	****	kN*m*m
Vollplastische Querkraft	Qply =	1039.230	kN
Elastizitätsmodul	E =	21000.000	kN/cm**2
Schubmodul	G =	8100.000	kN/cm**2

Die maximale Beanspruchung stellt sich an der Einspannung ein, nach Theorie I.O. ist der Träger nur gering ausgelastet:

$$\max \sigma_x = 3750,0 / 2386,034 = 1,572 \text{ kN/cm}^2$$

Bei diesem Beispiel fehlt jede Vorstellung dazu, ob der Träger auf Biegedrillknicken gefährdet ist oder nicht. Allerdings sollte zu denken geben, daß der Träger nur am linken Lager gegen Verdrehungen  $\vartheta$  gehalten ist. Es können sich über die ganze Trägerlänge stetig zunehmende Verdrehungen einstellen, so daß relativ große Abtriebskräfte aus der Streckenlast und auch aus der Einzellast zu erwarten sind. Diese Überlegung wird von der Eigenwertuntersuchung bestätigt: Der nur wenig über 1 liegende kritische Lastfaktor läßt auf eine starke Zunahme der Beanspruchungen nach Theorie II.O. schließen.

-----  
 Kritische Faktoren für die vorgegebenen Lasten :  
 -----

Lastfall Querlasten allein :

Kritischer Lastfaktor : 1.138094  
 Schrittweite : 0.0000001

-----  
 Tragsicherheitsnachweis des Trägers nach DIN 18800, Teil 1 oder 2  
 Ersatzstabverfahren für einachsige Biegung ohne N-Kraft nach Gl.(16)  
 -----

Profil : Einfach-symmetrisches T-Profil

Sicherheitsbeiwert  $\Gamma_{M}$  : 1.10  
 $N_{pl}$  : 2880.0000 kN  
 $M_{ply}$  : 643.5818 kN\*m  
 $M_{plz}$  : 106.3636 kN\*m

(Eine Abminderung von  $M_{plz}$  ist hier nicht erforderlich.)

Die maximale Beanspruchung tritt auf in Feld 1, Schnitt 0 :

Abstand  $x$  im Träger : 0.00 cm  
 Normalkraft  $N(x)$  : 0.0000 kN  
 Moment  $M_y(x)$  : -37.5000 kN\*m  
 Moment  $M_z(x)$  : 0.0000 kN\*m

Kritischer Lastfaktor für die Querlasten allein :

ETAM : 1.13809

Kritischer Lastfaktor für die Normalkräfte allein :

ETAN : 0.00000

Knickspannungslinie : b-Linie

Momentenbeiwert nach Tab.11 : 1.30

Trägerbeiwert  $n$  nach Tab.9 : 2.50

Abminderungsfaktor  $K_n$  : 1.00

$\lambda$ -Z für  $N_{Ki}$  : 0.0000

$\kappa$ -Z : 1.0000

$\lambda$ -M fuer  $M_y, K_i$  : 4.0728

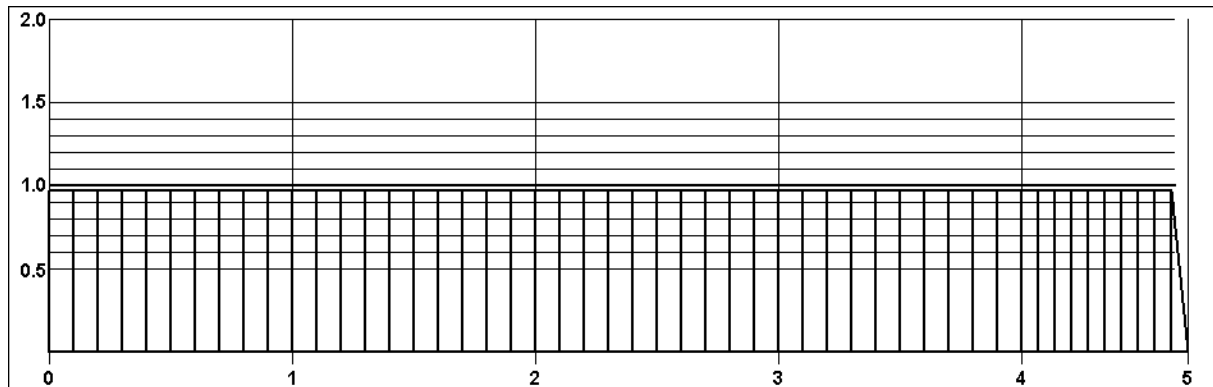
$\kappa$ -M : 0.0603

+++++

Tragsicherheit : 0.967

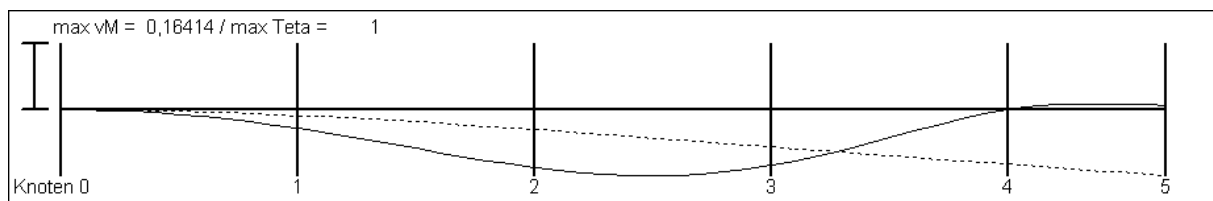
+++++

Der Träger ist auf seiner ganzen Länge nahezu gleichmäßig ausgelastet: Dies zeigt die für alle Zehntelpunkte der Trägerfelder ausgewertete Interaktionsformel (16):



**Bild 16 - Interaktionsdiagramm nach DIN 18800-2, Gl.(16)**

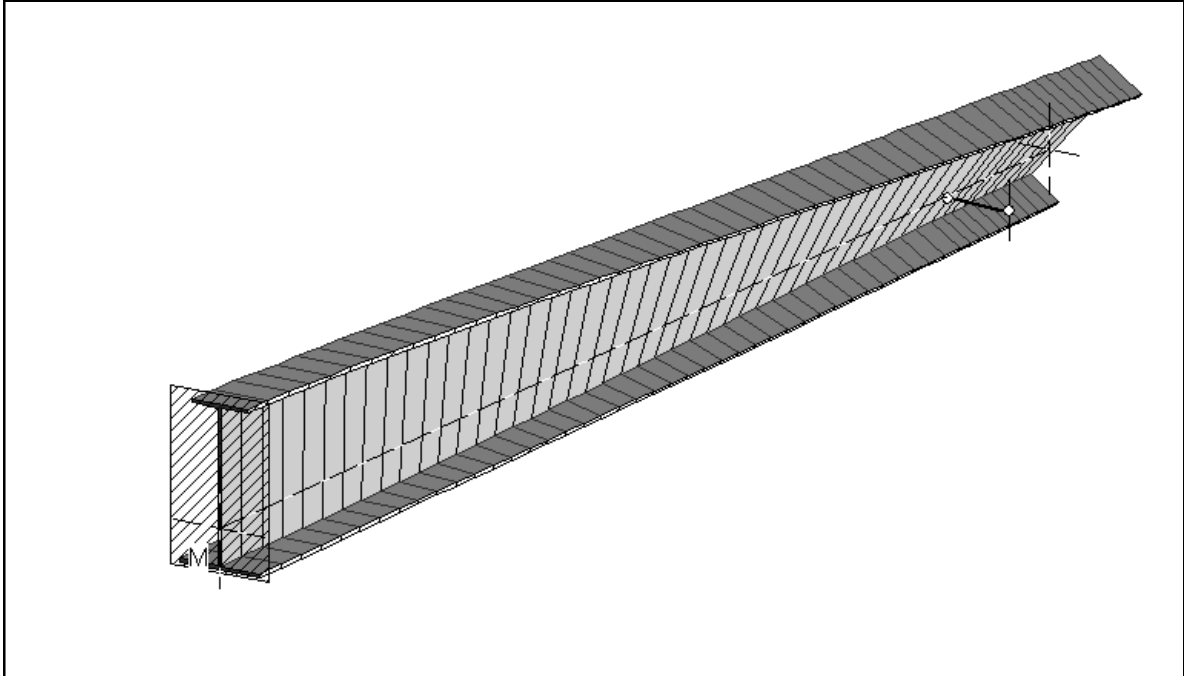
Die Eigenfunktionen bestätigen die Vorüberlegung, daß bei diesem Beispiel auffallend starke Verdrehungen auftreten:



**Bild 17 - Eigenfunktionen**

$$\begin{aligned} \text{---} v_M(x) \\ \text{-----} J(x) \end{aligned}$$

Die Eigenfunktionen wurden auf  $\max \vartheta = 1,0$  normiert,  $v_M$  erreicht dabei nur den Maximalwert von  $\max v_M = 0,1639$ . Die Knickfigur verdeutlicht die überwiegende Verdrehung des Trägers:



**Bild 18 - Knickfigur**

Bei einem Spannungsnachweis nach Theorie II.O. stellt sich bei diesem Träger die grundsätzliche Frage, wie die Vorverformungen und in welcher Größe sie anzusetzen sind. Naheliegender wäre eine möglichst affine Vorverformung, indem die Verschiebungen  $v_M^*$  und  $\vartheta^*$  so kombiniert werden, daß einmal der Verlauf der Eigenfunktionen gut nachgezeichnet wird, daß zum anderen die Maximalordinate den vorgeschriebenen Wert  $0,5 \cdot L / 200$  (c-Linie) annimmt, wobei auch die Bezugslänge  $L$  festzulegen ist.

Drei Möglichkeiten werden untersucht:

- ◆ Eine lineare Seitenverschiebung  $v_M^*$  mit der Ordinate  $v_0 = 0,5 \cdot 700 / 200 \cdot 2/3 = 1,167$  cm am freien Trägerende bringt keinen Einfluß, da bei einer Vorkrümmung nur die 2. Ableitung  $v_M^{*''}$  Einfluß hat.
- ◆ Eine seitliche parabelförmige Krümmung  $v_M^*$  nur des Innenfeldes mit der Maximalordinate  $\max v_M^* = 0,5 \cdot 600 / 200 = 1,5$  cm, die für den Spannungsnachweis noch um  $2/3$  abgemindert werden darf, ergibt eine maximale Randspannung an der Einspannung von  $\max \sigma_x = 22,338 \text{ kN/cm}^2$ , die um etwa 2% über der Grenzspannung  $f_{y,k} / 1,10 = 21,818 \text{ kN/cm}^2$  liegt. (Ohne diese Abminderung liegen die maximalen Randspannungen bei  $32 \text{ kN/cm}^2$ .)

```
-----
Tragsicherheitsnachweis des Trägers nach der Spannungstheorie
  und Nachweis eines Fließgelenkes nach 18800-1 (757)
  Profil : Vordefiniertes Profil, Typ 2
  Sicherheitsbeiwert GammaM : 1.10
-----
```

Fall 1

- Berechnung der Schnittgrößen My,Qz in der Trägerebene nach I.O.  
(I.O.: Vorverformungen w\* haben keinen Einfluß)
- Berechnung der Schnittgrößen rechtwinklig zur Trägerebene nach II.O.  
ohne Berücksichtigung von Vorverformungen v\*,Teta\*

```
-----
Abstand x im Träger : 0.00 cm (Feld 1 - Schnitt 0)
Normalkraft N(x) : 0.0000 kN
Biegemoment My(x) : -37.5000 kN·m
Biegemoment Mz(x) : 0.0000 kN·m
Wölbmoment Mw(x) : 0.0000 kN·m·m
-----
```

```
+++++
Randspannung max Sigmax : 1.537
+++++
```

Der Nachweis eines Fließgelenkes nach 18800-1 (757) ist nicht möglich, da die Voraussetzung eines doppelt symmetrischen Walzprofils oder eines damit vergleichbaren geschweißten Profils nicht gegeben ist.

Fall 2

- Berechnung der Schnittgrößen My,Qz in der Trägerebene nach I.O.  
(I.O.: Vorverformungen w\* haben keinen Einfluß)
- Berechnung der Schnittgrößen rechtwinklig zur Trägerebene nach II.O.  
Vorverformungen v\*,Teta\* wurden um 2/3 abgemindert

```
-----
Abstand x im Träger : 0.00 cm (Feld 1 - Schnitt 0)
Normalkraft N(x) : 0.0000 kN
Biegemoment My(x) : -37.5000 kN·m
Biegemoment Mz(x) : 0.8338 kN·m
Wölbmoment Mw(x) : -12.0575 kN·m·m
-----
```

```
+++++
Randspannung max Sigmax : 22.338
+++++
```

- ◆ Da die Verschiebungen  $v_M$  im Eigenvektor gegenüber  $\vartheta$  deutlich kleiner sind, liegt der Gedanke nahe, anstelle der Vorkrümmung  $v^*(x)$  eine Vorverdrehung  $\vartheta^*(x)$  über die gesamte Trägerlänge anzusetzen. Dabei sind mehrere Varianten denkbar: Nimmt man die Verschiebung des Obergurtes am Kragarmende zum Maßstab und fordert, daß  $v_{Gurt} = \vartheta^*(L) \cdot (e_z + t_\sigma/2 + z_M) = 0,5 \cdot 700 / 200 \cdot 2/3 = 1,167$  cm mit dem nach DIN 18800-2, Tabelle 3, anzusetzenden Wert für eine Vorkrümmung  $v^*(x)$  übereinstimmt, ergibt sich  $\vartheta^*(L) = \vartheta_0 = 0,02544$ . Gibt man eine lineare Vorverdrehung  $\vartheta(x)$  mit diesem Endwert  $\vartheta_0$  vor erhält man eine Randspannung von  $\max \sigma_x = 66,222$  kN/cm<sup>2</sup>, also weit oberhalb der zulässigen Spannung. Nur zum Vergleich wird  $\vartheta_0 = 700 / (60 \cdot 750) = 0,0155$  vorgegeben, ebenfalls bei einem linearen Verlauf von  $\vartheta(x)$ . Die maximale Randspannungen lautet jetzt :  $\max \sigma_x = 41,075$  kN/cm<sup>2</sup>

Was ist nun zulässig und „richtig“?

**L K J L K J L K J L K J L K J L K J L K J L K J**

### **Literatur**

FRIEMANN, H. & R. STROETMANN : Zum Nachweis ausgesteifter biegedrillknickgefährdeter Träger. Der Stahlbau 67 (1998), H.12 : 936-955.

LINDNER, J., J. SCHEER und H. SCHMIDT : Stahlbauten – Erläuterungen zu DIN 18800 Teil 1 bis Teil 4. Berlin/Köln : Beuth Verlag; Berlin: Verlag Ernst & Sohn 1998.

OXFORD, J.: Zur Kippstabilität stählerner I-Dachpfetten mit Imperfektionen in geneigten Dächern bis zum Erreichen der plastischen Grenzlast durch die Biege- und Schubsteifigkeit der Dacheindeckung. Der Stahlbau 45 (1976), H.10: 307-311, H.12: 365-371.

RABOLT, K.: Beitrag zur näherungsweisen Bestimmung des Verformungszustandes des geraden Stabes mit ideal-elastischem ideal-plastischem Material unter beliebiger Belastung. Habilitationsschrift TU Dresden 1970.

WITTEMANN, K. (1992): Ideale Biegedrillknicklast für einen drehgebeteten Druckstab mit gebundener Drehachse. Der Stahlbau 61, 1992, H.4 : 126-127.

# **Bestimmung der kritischen Lasten bei komplexen Stabilitätsproblemen mit der Methode der Finiten Elemente**

Referent:

**Dr. Wolfgang Schneider  
SOFiSTiK Service GmbH, Mainz**



# 1 Einleitung

Eine Struktur kann durch die Einwirkung von Belastungen in einen instabilen Zustand geraten. Die Grenzen, an denen eine stabile Struktur instabil wird, gilt es mit Hilfe der kritischen Lasten zu ermitteln. Diese Ermittlung kann für einfache statische Systeme mit Differentialgleichungen beschrieben und geschlossen gelöst werden. Bei komplexeren Systemen ist eine geschlossene Lösung kaum mehr möglich, so dass man auf numerische Lösungsverfahren übergehen muss. Um die Vorgehensweise bei der Berechnung von Stabilitätsgrenzen mit der Finiten Element Methode zu beschreiben, müssen die zugrunde liegenden Begriffe der Methode bekannt sein. Die Stabilitätsuntersuchung eines statischen Systems mit der Finiten Element Methode ist ein nichtlineares Problem. Daher wird im folgenden kurz auf die linearen und nichtlinearen Matrizengleichungen eingegangen.

## 1.1 Grundgleichung der Statik mit der FE-Methode

Ein statisches System kann mit Hilfe der finiten Element Methode durch ein System von N Gleichungen mit N Unbekannten mathematisch beschrieben werden. Als Bekannte im Gleichungssystem sind die Kräfte  $f_a$  ; ( $a = 1, \dots, N$ ) in den Richtungen der unbekanntenen Verschiebungen  $u_b$  ; ( $b = 1, \dots, N$ ) durch die äußeren Belastungen gegeben. Die Koeffizienten  $k_{ab}$  ; ( $a, b = 1, \dots, N$ ) beschreiben das Verhalten des statischen Systems und bilden die Steifigkeitsmatrix:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= k_{11}u_1 + k_{12}u_2 + \dots + k_{1b}u_b + \dots + k_{1N}u_N \\
 f_2 &= k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + \dots + k_{2b}u_b + \dots + k_{2N}u_N \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 f_a &= k_{a1}u_1 + k_{a2}u_2 + \dots + k_{ab}u_b + \dots + k_{aN}u_N \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 f_N &= k_{N1}u_1 + k_{N2}u_2 + \dots + k_{Nb}u_b + \dots + k_{NN}u_N ; (a, b = 1 \dots N) \quad (1)
 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich allgemein darstellen:

$$f_a = \sum_b k_{ab} u_b ; (a, b = 1 \dots N) \quad (2)$$

oder mit Hilfe der Matrizen Schreibweise:

$$\{f\} = [k] \{u\} \quad (3)$$

Diese Gleichung ist für statische Probleme allgemein gültig. Wenn die Koeffizienten der Matrix  $k_{ab}$  konstant sind, also keine Funktion der Verschiebungen  $u$  und/oder der Kräfte  $f$  sind, so handelt es sich um ein lineares Gleichungssystem, was sich mit einem linearen Gleichungslöser berechnen lässt. Die lineare Steifigkeitsmatrix wird durch ein zusätzliches L in der obigen Gleichung gekennzeichnet. Das lineare Gleichungssystem der Statik lautet damit:

$$\{f\} = [k^L] \{u\} \quad (4)$$

## 1.2 Lösung der nichtlinearen Grundgleichung der Statik

Ist die Steifigkeitsmatrix eine Funktion von  $u$  und/oder  $f$ , so handelt es sich um ein nichtlineares Gleichungssystem. Dieses kann numerisch näherungsweise gelöst werden, indem man das Problem linearisiert. Die Lösung, die man so ermittelt, hat nur eine begrenzte Gültigkeit in der Nähe des aktuellen Verformungszustandes. Daher setzt man die gefundene Lösung (die unbekanntes Verschiebungen) in das Gleichungssystem wieder ein und kontrolliert den Fehler. Ist der Fehler größer als eine vorgegebene Genauigkeit, so wiederholt man den Vorgang so lange, bis sich der Lösungsvektor nur noch sehr gering ändert. Dieses iterative Vorgehen bei der Gleichungslösung lässt sich zum Beispiel mit dem sogenannten Newton-Raphson Lösungsverfahren beschreiben:

$$\{f\} - \{f^{int}\}^{(i-1)} = [k]^{(i-1)} \{\Delta u\}^{(i)} \quad ; \quad (i=1, \dots, i_{max}) \quad (5)$$

Die Tangentensteifigkeitsmatrix  $[k]^{(i-1)} = [k^L + k^u + k^\sigma]^{(i-1)}$  setzt sich aus einem konstanten Anteil  $k^L$ , einem verschiebungsabhängigen Anteil  $k^u$  und einem von inneren Kräften  $f^{int}$  abhängigen Anteil  $k^\sigma$  zusammen. Mit  $k^u$  wird die Änderung der Steifigkeitsmatrix durch Starrkörperverschiebungen, Rotationen und große Deformationen berücksichtigt. Mit  $k^\sigma$  wird die Änderung der Steifigkeitsmatrix durch innere Kräfte, wie zum Beispiel Vorspannungen, Eigenspannungszustände o.ä. beschrieben. Der Index  $(i)$  ist der Iterationsindex. Er kennzeichnet, welche Größen während der Iteration ineinander eingesetzt werden müssen. Die gesamte Verformung nach der  $i$ -ten Iteration lässt sich zum Beispiel aus der Verformung des vorherigen Schrittes und des aktuellen Zuwachses ermitteln:

$$\{u\}^{(i)} = \{u\}^{(i-1)} + \{\Delta u\}^{(i)} \quad (6)$$

Die inneren Kräfte  $\{f^{int}\}^{(i-1)}$  sind die Reaktionen des Systems auf die äußeren Lasten des Iterationsschrittes  $(i-1)$ .

Die äußeren Lasten  $\{f\}$  werden vom Ingenieur als bekannte Größen vorgegeben. Bei der Ermittlung einer Grenzlaster, werden diese als variable Größe kontinuierlich gesteigert. Bei nichtlinearen Problemen werden die äußeren Lasten nicht in einem Lastschritt sondern in mehreren Teilschritten aufgebracht, um die Belastungsgeschichte bis zur eigentlichen Stabilitätsgrenze nachfahren zu können. Besonders wichtig wird die Zerlegung in Lastschritte, wenn ein nichtlineares Materialgesetz ins Spiel kommt. Durch sogenannte pfadabhängige Materialien zum Beispiel kann sich eine Struktur bei unterschiedlichen Lastschrittweiten unterschiedlich verhalten. Eine genügend feine Teilung der Lasten in Lastschritte ist bei solchen nichtlinearen Berechnungen unbedingt notwendig. Daher wird das obige Gleichungssystem noch um einen Lastschrittindex  $(t)$  erweitert:

$${}^t\{f\} - {}^t\{f^{int}\}^{(i-1)} = {}^t[k]^{(i-1)} {}^t\{\Delta u\}^{(i)} \quad ; \quad (i = 1, \dots, i_{max}; t = 1, \dots, t_{max}) \quad (7)$$

mit der Tangentensteifigkeitsmatrix  ${}^t[k]^{(i-1)} = {}^t[k^L + k^u + k^\sigma]^{(i-1)}$

der Verformung  ${}^t\{u\}^{(i)} = {}^t\{u\}^{(i-1)} + {}^t\{\Delta u\}^{(i)}$

den äußeren Lasten  ${}^t\{f\}$

und den inneren Kräften  ${}^t\{f^{int}\}^{(i-1)}$

Der Index  $t$  beschreibt die Laststufe und der Index  $(i)$  die aktuelle Iterationsstufe. Für den ersten Lastschritt ( $t=1$ ) und den ersten Schritt der Iteration ( $i=1$ ) entspricht das Gleichungssystem (1) dem linearen Gleichungssystem:

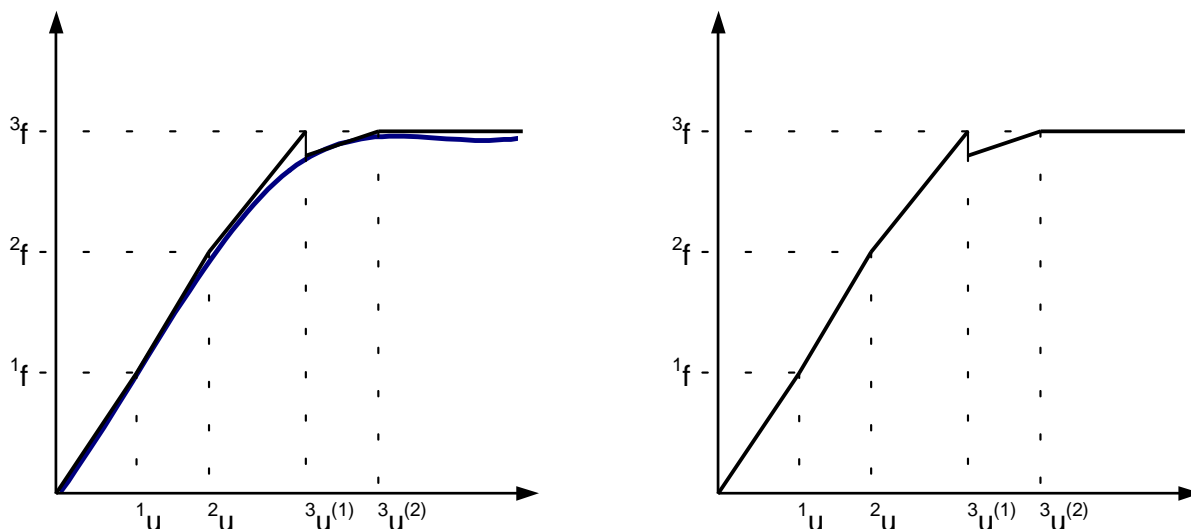
$${}^1\{f\} = {}^1[k]^{(0)} {}^1\{\Delta u\}^{(1)}$$

$$\text{mit } {}^1[k]^{(0)} = {}^1[k^L]^{(0)} = [k^L]$$

$${}^1\{u\}^{(1)} = {}^1\{\Delta u\}^{(1)} = \{u\}$$

$${}^1\{f\} = \{f\}$$

Den Ablauf einer solchen Iteration mit mehreren Lastschritten kann man an dem folgenden Schaubild eines einzelnen Freiheitsgrades nachvollziehen:



**Abbildung 1: nichtlineare Kraft/Verschiebungsbeziehung mit Iterationsverlauf**

Wie man aus Abbildung 1 entnehmen kann, wird bei diesem Beispiel die Belastung in 3 Laststufen gesteigert. Die Kraft/Verschiebungsbeziehung (Steifigkeitsmatrix) ist für die Schritte 1 und 2 nahezu linear, so dass die Iteration der Verschiebungslösung  $1_u$  und  $2_u$  im ersten Schritt direkt zum Ziel führt. Bei Lastschritt 3 beginnt das System nichtlinear zu antworten, so dass die mit Hilfe der Tangentensteifigkeitsmatrix von Laststufe 2 ermittelten Verschiebungen nicht genau genug sind. Daher ist ein Update der Steifigkeitsmatrix notwendig und in einem zweiten Iterationsschritt wird nach der genauen Verschiebungslösung  $3_u^{(2)}$  gesucht. Auch diese Verschiebungslösung ist noch nicht genau genug. Es wird ein erneutes Update der Tangentensteifigkeitsmatrix notwendig. Diesmal wird die berechnete Lösung  $3_u^{(3)}$  so groß, daß die Iteration abgebrochen werden muß. Die Verschiebungen signalisieren also eine Instabilität, was es erleichtert, Stabilitätsgrenzen numerisch zu erkennen.

## 2 Definition der Stabilität

Die Frage, ob sich eine Struktur stabil oder instabil verhält, kann immer nur im Zusammenhang mit den Freiheitsgraden gestellt werden, in denen die Kräfte  $\{f\}$  als unabhängige Variablen vorgegeben sind. Vorgegebene Verschiebungen (wie zum Beispiel Auflagerbedingungen) haben nur einen passiven Einfluss auf die Stabilitätsgrenze.

### 2.1 Linearisierte Stabilität

Wie bereits erwähnt, ist das Stabilitätsproblem ein nichtlineares Problem. Zur Untersuchung der Stabilität einer Struktur genügt es, die unmittelbare Nachbarschaft eines gegebenen Verformungszustandes zu untersuchen. Dazu wird die linearisierte Tangentialgleichung verwendet:

$$\{\Delta f\} = [\Delta k] \{\Delta u\} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \{\Delta f\} &= {}^t\{f\} - {}^{t-1}\{f\}^{\text{int}\}^{(i-1)} \\ {}^t\{\Delta u\}^{(i)} &= {}^t\{u\}^{(i)} - {}^t\{u\}^{(i-1)} \\ \{\Delta k\} &= {}^t\{k\}^{(i-1)} \end{aligned}$$

Transformiert man die Freiheitsgrade der Struktur so (Hauptachsentransformation), dass die Tangentensteifigkeitsmatrix  $[\Delta k]$  zur Diagonalmatrix wird, so sind die Diagonalelemente die Eigenwerte der Steifigkeitsmatrix:

$$\{\Delta f\} = \begin{bmatrix} I_1 & & 0 \\ & \mathbf{O} & \\ 0 & & I_N \end{bmatrix} \{\Delta \underline{u}\} \quad (9)$$

Die  $N$  Freiheitsgrade sind nun entkoppelt. Die Gleichung beschreibt  $N$  als voneinander unabhängige Strukturen mit den individuellen Steifigkeiten  $\lambda_N$ . Bringt man in einer solchen Einzelstruktur ein Kraftinkrement  $\Delta \underline{f}_a$  auf und erhält als Antwort ein gleichgerichtetes Verschiebungsinkrement  $\Delta \underline{u}_a$ , dann ist die geleistete Arbeit positiv:

$$\Delta \underline{f}_a * \Delta \underline{u}_a > 0 \quad \text{STABIL}$$

Sind Kraft- und Verschiebungsinkrement entgegengesetzt, so ist die geleistete Arbeit negativ. Dies kennzeichnet einen instabilen Zustand:

$$\Delta \underline{f}_a * \Delta \underline{u}_a < 0 \quad \text{INSTABIL}$$

Die Zustände STABIL und INSTABIL unterscheiden sich durch das Vorzeichen des zugehörigen Eigenwertes  $\lambda_a$ . Ist der Eigenwert  $\lambda_a \equiv 0$ , ist die Stabilitätsgrenze erreicht (labiles Gleichgewicht). Um den Zustand zu berechnen, bei dem die stabile Struktur durch Krafterhöhung instabil wird, muss mindestens ein Eigenwert der Tangentensteifigkeitsmatrix Null werden. Dies ist dann der Fall, wenn die Determinante von  $[k_{ab}]$  Null ist:

$$\det([k_{ab}]) = 0 \quad (10)$$

Um eine solche Lösung zu finden, kann man z.B. die Belastungen inkrementell solange erhöhen (sich an der Kraft-Verschiebungskurve entlang rechnen), bis die Tangentensteifigkeit zu Null wird. Diese Art bezeichnet man auch als Determinanten-Suchverfahren. Sie sind im Allgemeinen recht aufwendig und bergen die Gefahr, dass man die entscheidende Nullstellen der Determinante verpasst, weil man zum Beispiel durch zu große Lastinkremente über eine Instabilitätsstelle „hinwegspringt“.

Hat man den Belastungszustand ermittelt, an dem die Stabilitätsgrenze erreicht ist, lässt sich recht leicht die zugehörige Stabilitätsform ermitteln:

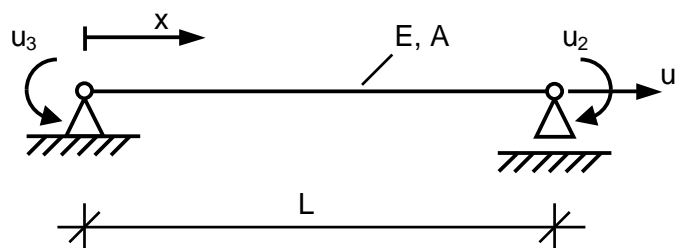
$$[k_{ab}] \{x_b\} = 0 \quad (11)$$

Dieser Eigenvektor  $\{x_b\}$  beschreibt das Stabilitätsversagen, wie Knicken, Beulen, Biegedrillknicken.

Der erste Eigenwert liefert die Last, bei der sich die untersuchte Struktur instabil verhält. Es muss nicht die Laststufe sein, bei der das System total kollabiert, sondern es kann sich dabei auch um lokal begrenzte Instabilitäten handeln. Daher ist es bei der Bestimmung der kritischen Lastfaktoren wichtig, die zugehörige Beuleigenform zu beurteilen, um die Art des Versagens einzuschätzen.

## 2.2 Knicken

Am Beispiel des Eulerschen Knickstabes soll das Problem der Stabilität erläutert werden. Gegeben sei das folgende statische System:



**Abbildung 2: Systemskizze**

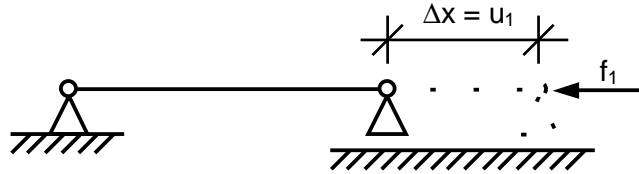
Dieses System hat 3 unabhängige Freiheitsgrade (N=3). Ein Freiheitsgrad ist die Verschiebung des freien Endes in X-Richtung ( $u_1$ ) und zwei Verdrehfreiheitsgrade existieren um die in die Zeichenebene zeigende Y-Achse ( $u_2$  und  $u_3$ ). Die zugehörige lineare Steifigkeitsmatrix  $k^L$  hat die Form:

$$[k^L] = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$$

Da  $k_{12}$  und  $k_{13}$  Null sind, verhält sich also der Stab in Achsenrichtung wie ein linearer Fachwerkstab, der bei einer Last  $f_1$  in Achsenrichtung mit einer Verformung  $u_1$  reagiert:

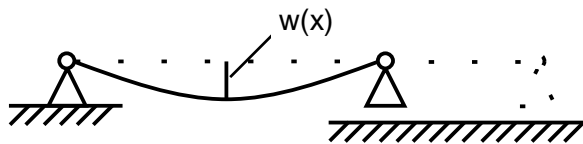
$$f_1 = k_{11} \cdot u_1 = EA/L \cdot u_1$$

Die Verformung nach einer Druckkraft  $f_1$  ist in der folgenden Zeichnung dargestellt. Der Stab verkürzt sich um einen Betrag  $\Delta x = u_1$  :



**Abbildung 3: verformtes System für  $f_1 < f_{krit}$**

Wird die Last aber gesteigert, so nimmt der Einfluß des Steifigkeitsanteils  $k^\sigma$  zu, bis schließlich neben der Verformung  $u_1$  auch die eine Verformungsfigur mit den Verdrehungen  $u_2$  und  $u_3$  existiert, die einer geringeren potentiellen Energiestufe entspricht:



**Abbildung 4: verformtes System für  $f_1 \geq f_{krit}$**

Für diese Verformungsfigur gilt die Gleichgewichtsbeziehung:

$$EI_y w''(x) = -M_b(x) = w(x) f_1$$

Daraus ergibt sich die Differentialgleichung für  $w(x)$ :

$$w''(x) + \alpha^2 w(x) = 0$$

$$\text{mit } a = \sqrt{\frac{f}{EI_y}}$$

Die Lösung der DGL liefert:

$$w(x) = C_1 \sin(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x)$$

$$\text{mit } w(0) = w(L) = 0$$

$$\text{folgt } C_2 = 0$$

$$\text{und } \sin(\alpha L) = 0 \text{ und damit } \alpha = \pi/L$$

Daraus folgt für die Kraft  $f_{\text{krit}}$ , bei der die Struktur von der Verformungsfigur 1 in die Verformungsfigur 2 übergeht:

$$f_{\text{krit}} = a^2 EI_y = p^2 \frac{EI_y}{L^2} \quad (12)$$

Berechnet man die kritische Last numerisch, so ist die explizite Gleichgewichtsgleichung nicht bekannt. Vielmehr wird bei der Finiten Elementmethode die Steifigkeit in Abhängigkeit von  $u$  und  $f$  bestimmt. Dabei kommt es beim Übergang von der Verformungsfigur 1 zu Verformungsfigur 2 zu Steifigkeitskoeffizienten in der Steifigkeitsmatrix  $k$ , die auf der Hauptdiagonalen Null sind. Ein Gleichungslöser dividiert jedoch alle Spalten- bzw. Zeilenelemente einer Matrix bei der Lösung durch das jeweilige Diagonalelement. Wenn der Algorithmus dabei feststellt, dass das Diagonalelement Null oder negativ ist, kommt eine Fehlermeldung wie : „Die Steifigkeitsmatrix ist singulär“ oder „Das System wird kinematisch“. Die Systemmatrix lässt sich nicht mehr zerlegen und der Lösungsprozess muss beendet werden. Dieses Verhalten des Gleichungslösers lässt sich auch mit Hilfe der Determinante der Systemmatrix beschreiben:

$$\det(k) \leq 0$$

Der Lösungsalgorithmus streikt, wenn die obige Bedingung erfüllt ist. Anders herum kann man durch Ermittlung der ersten Nullstelle der Determinante der Systemmatrix, den Lastfaktor bestimmen, bei dem das System instabil wird:

$$\det(k) = \det(k^L + k^u + k^\sigma) = 0 \quad (13)$$

Ist die Determinante nicht Null, lässt sich in der Nähe der aktuellen Steifigkeit  $k$  ein Wert  $\lambda$  ermitteln, für den gilt:

$$\det(k^L + \lambda * k^\sigma) = 0 \quad (14)$$

So formuliert, liefert die Systemmatrix ein Eigenwertproblem, dass sich sehr einfach lösen lässt. Da man hierbei nur an dem geringsten Eigenwert  $\lambda$  interessiert ist (Knicklastfaktor, Knickeigenwert), kann man das System für  $\lambda = \min(\lambda_i)$  numerisch iterativ schnell lösen. Die zugehörige Eigenform beschreibt die Figur des Systems, für den dieses instabil wird (erste Knickeigenform).

### 3 Stabilitätsuntersuchungen mit der Finiten Element Methode

Nach diesen theoretischen Vorüberlegungen soll nun ein praktischer Weg aufgezeigt werden, wie man mit einem Finiten Element Programm die Stabilitätsnachweise durchführen kann. Als Erstes muß das statische System mit Finiten Elementen diskretisiert werden. Zur Abbildung von Stahlträgern, Platten und Scheiben aber auch räumlich gekrümmter Schalen werden die allgemeinen Schalenelemente verwendet. Die folgenden Ausführungen lassen sich aber auch auf andere Elementtypen bzw. Systeme mit gemischter Verwendung unterschiedlicher Elementtypen übertragen.

Mit den finiten Elementen wird das System mit seiner echten Geometrie und den vorhanden Randbedingungen abgebildet. Dabei ist eine Mindestanzahl von Elementen je Beulfeld notwendig, um zu erwartende Versagensformen genügend genau mit verschobenen Elementen abzubilden. Es gelten hierbei die gleichen Regeln, wie bei der Bestimmung von Spannungen im Tragwerk. Ziel der Untersuchung ist nun die Bestimmung einer idealen Beullast und einer realen Beullast, unter der das Gesamtsystem instabil wird. Die Bezeichnung „Beul“ wird hier stellvertretend für alle anderen Arten von Stabilitätsversagen gewählt. Die eigentliche Versagensform kann also von ihrer Art her ein Knicken, Kippen, Biegedrillknicken, Beulen oder auch die Ausbildung von Fließgelenken sein.

#### 3.1 Ideale Beullast

Die ideale Beullast wird unter idealisierten Voraussetzungen bestimmt. Nach DIN 18800 Teil 4 sind hierzu die folgenden Voraussetzungen zu verwenden:

- Perfekte Geometrie
- Perfekte Lasteinbringung und Lagerung
- Unbeschränkte Gültigkeit des Hookschen Gesetzes
- Ideal isotroper Werkstoff
- Keine Eigenspannungen

Unter diesen Voraussetzungen wird nun nach der Elastizitätstheorie die kleinste Verzweigungslast gesucht. Bei einigen Finite Element Programmen gibt es Möglichkeiten, die ideale Verzweigungslast automatisch bestimmen zu lassen. Dazu wird zum Beispiel die Last so lange erhöht, bis die Steifigkeitsmatrix singulär ( $\det(k^L+k^\sigma) \leq 0$ ) ist oder das Problem wird als Eigenwertproblem direkt gelöst. Wenn solche Möglichkeiten nicht gegeben sind, kann der Anwender mehrere Lastfälle rechnen, in denen er die Lasten jeweils um einen Faktor steigert. Damit das Programm die Stabilitätsgrenze bemerkt, also die Gesamtsteifigkeitsmatrix mindesten ein Diagonalelement enthält, das kleiner oder gleich Null ist, muß die Steifigkeitsmatrix während des Rechenvorganges an die aktuelle Last/Verformungssituation angepasst werden. Dies erreicht man, wenn man nach Theorie II. Ordnung (oder allgemeiner: mit geometrischer Nichtlinearität) rechnet. Nur so wird die Anteil  $k^\sigma$  von Gleichung (13) auch in der Berechnung erfasst. Kann der Gleichungslöser die Gleichung (3) nicht mehr lösen, so ist die Systemmatrix singulär geworden ist und die Stabilitätsgrenze erreicht. Durch Variation der Lastschritte lässt sich der Lastfaktor beliebig genau annähern.

#### **Achtung:**

*Einfache Lasterhöhung mit Berechnungen nach Theorie I. Ordnung liefern nie die ideale Knicklast, da hier immer mit der Ausgangsmatrix  $[k^L]$  gerechnet wird. Diese ist jedoch unabhängig vom aktuellen Verformungszustand, so dass praktisch unendlich große Lasten aufgebracht werden könnten, ohne dass die Steifigkeitsmatrix singulär wird.*

Es muß also bei der Laststeigerung unbedingt eine Aktualisierung der Steifigkeitsmatrix erfolgen. Dazu muß das Programm die geometrische Nichtlinearität berücksichtigen.

Bei dem verwendeten Programm gibt es die Möglichkeit, die Laststeigerung zu automatisieren. Durch Vorgabe von einem Startfaktor, einem Endfaktor, einem Zuwachs und einem Progressionsfaktor, lässt sich der Verlauf der Laststeigerung definieren. Das Programm erhöht die Lasten des ausgewählten Lastfalls bis zum Eintreten einer Instabilität. Ist diese erreicht, wird der Zuwachs des letzten Lastschrittes halbiert und mit dem so reduzierten Lastfaktor erneut gerechnet. Dieser Vorgang wird solange wiederholt, bis wieder eine stabile Laststufe gefunden wurde. Von dort aus wird dann weiter gesteigert, bis die maximale Anzahl der Iterationen oder eine maximale Grenzlast erreicht ist. Dieses Verfahren entspricht der Determinantensuchmethode, d.h. die Nullstelle der Determinante aus Gleichung (13) wird durch gezieltes „Ausprobieren“ iterativ ermittelt. Die zu der idealen Beullastlast gehörenden Spannungen in den Elementen ist die ideale Beulspannung.

### 3.2 Reale Beulspannungen

Bei der Ermittlung der realen Beulspannungen sind baupraktisch unvermeidbaren Einflüsse zu berücksichtigen:

- Geometrische Imperfektionen
- Strukturelle Imperfektionen
- Nichtelastisches Werkstoffverhalten

Die reale Beulspannung ist die gegenüber der idealen Beulspannung abgeminderte Spannung und beschreibt den charakteristischen Wert des Widerstandes im Grenzzustand der Instabilität. Wenn das Stabilitätsversagen tatsächlich dem Beulen einer Schale oder eines Feldes entspricht, so könnte man die Berechnung der realen Beulspannungen nach DIN 18800 Teil 4, Element 203 durchführen. Lässt sich die Versagensform nicht eindeutig zuordnen, so bleibt die Möglichkeit, die reale Stabilitätsgrenze auch mit der Finiten Element Methode zu bestimmen. Dazu sind gegenüber der Vorgehensweise aus Kapitel 3.1 weitere Schritte notwendig, um die geometrische Imperfektion, die strukturelle Imperfektion und das nichtlineare Werkstoffverhalten zu berücksichtigen. Will man dies mit der Finiten Elemente Methode tun, so muß eine Vorverformung des FE-Modells so eingepreßt werden, dass die kleinste reale Beullast errechnet wird. Ist die Vorverformung affine zur ersten Beuleigenform, so liefert eine Laststeigerung den geringsten Beulfaktor. Wie man zu der ersten Beuleigenform kommt wurde im vorherigen Kapitel beschrieben. Die Eigenform wird beurteilt und in die Versagensarten Knicken, Drillknicken, Biegedrillknicken, Beulen und Fließgelenkausbildung einsortiert. Die klassifizierte Beuleigenform wird nun so skaliert, dass die maximale Verformung den Vorverformungen aus der folgenden Tabelle genügt.

Systemart	Vorverformung	Quelle
Stabförmige Systeme	$l/300$	DIN 18800 Teil2, Tabelle 3
Knickspannungslinie a		
Knickspannungslinie b	$l/250$	
Knickspannungslinie c	$l/200$	
Knickspannungslinie d	$l/150$	
mehrteilig Stäbe	$l/500$	
unversteifte Beulfelder	$l_m/250$	DIN 18800 Teil3, Tabelle 2
versteifte Beulfelder	$a/400; b/400$	
Schalen		DIN 18800 Teil 4; (301)–(305)

**Tabelle 1: Vorverformungen zur Bestimmung der realen Beullasten**

Die so skalierte Eigenform wird auf die Koordinaten des Ausgangssystem aufaddiert. Nun kann wiederum durch Erhöhung der Lasten ein Lastfaktor ermittelt werden, für den das System die Plastizitätsgrenze erreicht bzw. durch Instabilität oder Fließgelenkausbildung versagt. Hier nun die Vorgehensweise in Form einer Checkliste zur Berechnung der realen Beullast.

1. Bestimmung der Eigenformen für den spannungsfreien Zustand.
2. Bestimmung der Verzweigungslast für das geometrisch perfekte System (ideale Beullast) mit Hilfe einer Traglastiteration (Th.II.O.) mit linear elastischem Materialverhalten unter den maßgebenden Lasten ( $\gamma$ -fache Last = Traglastfaktor 1).
3. Bestimmung der Eigenformen unter Last für den letzten konvergierten Zustand der Traglastiteration (vgl. 2.).
4. Auswahl der schädlichsten Eigenform für die Stabilitätsuntersuchung. Dabei zeichnen sich Eigenformen, die als geometrische Imperfektion die Stabilitätsgrenze herabsetzen, dadurch aus, daß die zugehörige Eigenfrequenz unter Last (vgl. 3.) gegenüber der Eigenfrequenz im unbelasteten Zustand (vgl. 1.) abfällt.
5. Beurteilung der Versagensform und Festlegung der Vorverformung nach Tabelle 1
6. Einprägen der schädlichen Eigenform als skalierte Vorverformung (geometrische Imperfektion) in die Ausgangsgeometrie. Als Skalierungsfaktor wird die Eigenform mit der maximalen schädlichen Auslenkung auf den Wert 1 skaliert und mit dem entsprechenden Faktor aus der Tabelle 1 durchmultipliziert.
7. Bestimmung der Traglast für geometrische Nichtlinearität (Th.II.O.) und elastischem Materialverhalten mit der unter 6. eingepprägten geometrischen Imperfektion.
8. Werden die plastischen Grenzspannungen für Schritt 7 überschritten, so ist eine Traglastiteration nach (Th.II.O.) und plastischem Materialverhalten mit der unter Schritt 6 eingepprägten geometrischen Imperfektion durchzuführen.

Im Folgenden noch ein paar Erläuterungen zur obigen Liste. Zur Bestimmung der geringsten Traglast ist es erforderlich, eine geeignete Vorverformung auf das statische System aufzubringen. Dies wird durch das Einprägen einer Verformung erreicht, die der ersten Beuleigenform entspricht. Um diese Eigenform zu erhalten, muß das Finite Elementprogramm die Beuleigenwerte bestimmen können. Dies kann zum Beispiel durch die Lösung des Eigenwertproblems aus Gleichung (13) erfolgen oder über die Bestimmung der dynamischen Eigenformen im Spannungszustand der letzten Traglaststufe. Hierbei sind nur die Eigenspannungen, nicht jedoch die zugehörigen Verformungen zu berücksichtigen, da die Vorverformungen ja auf das unverformte System aufgebracht werden sollen. Die erste Eigenform im Spannungszustand der Traglastiteration zeigt die Versagensform der Instabilität. Für diese Eigenform bestimmt man den Ort der maximalen Verformung und deren Betrag. Mit den Angaben aus der DIN 18800, bzw. der Tabelle 1 läßt sich dann ein geeigneter Faktor für die Eigenform ermitteln, um diese als Vorverformung der idealen Geometrie zu überlagern. Mit diesem geometrisch imperfekten System wird nun eine Traglastiteration durchgeführt, um den Lastfaktor der maximal aufnehmbaren Lasten zu bestimmen. Werden dabei die maximal zulässigen linear elastischen Grenzspannungen überschritten, muß zusätzlich zu der geometrischen Nichtlinearität die Materialnichtlinearität aktiviert werden. Sobald also die elastischen Grenzspannungen überschritten werden, beginnt die Plastifizierung der Materialbereiche und eine Umlagerung der Spannungen. Die maximale Traglast ist dann erreicht, wenn das System wiederum eine singuläre Steifigkeitsmatrix meldet. Dies kann durch die Bildung einer Fließgelenkkette oder durch den Eintritt einer anderen Art von Instabilität (Knicken, Kippen, Biegedrillknicken, Beulen) verursacht sein.

Falls die Beuleigenform vom verwendeten FE-Programm direkt über das Eigenwertproblem nach Gleichung (13) berechnet werden kann, so ermittelt man diese alternativ zu Punkt 1-4 und fährt mit Punkt 5 der Liste fort.

## 4 Beispiele

Im folgenden werden 4 typische Beispiele vorgestellt, an denen die Problematik der praktischen Durchführung einer solchen FE-Analyse diskutiert werden sollen.

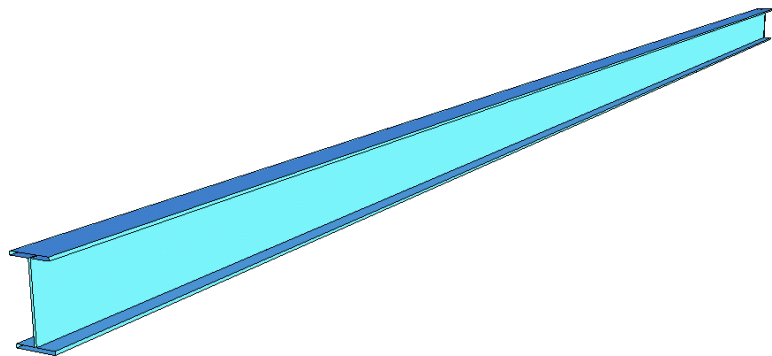
### 4.1 Knickstab

Der Eulersche Knickstab aus Kapitel 2.2 soll als erstes numerisch mit einem FE-Programm untersucht werden.

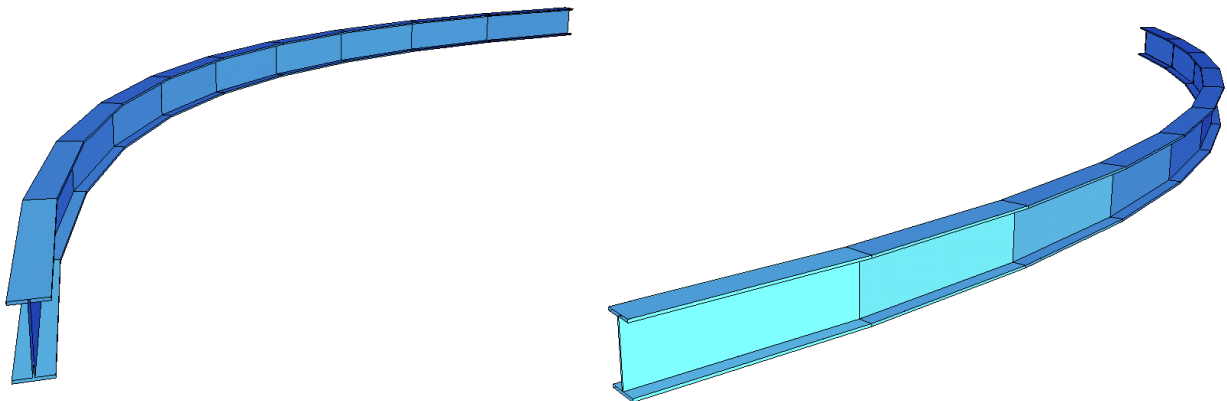
Querschnitt: IPE 200  
 $A = 28.5 \text{ cm}^2$   
 $I_z = 142 \text{ cm}^4$   
 $i_z = 2.23 \text{ cm}$   
 System:  $s_k = L = 6.90 \text{ m}$   
 Material:  $E = 21000 \text{ N/cm}^2$

Analytische Knicklast:

$$N_{Ki} = p^2 \frac{EI_z}{s_k^2} = 61.81 \text{ kN}$$



Das System wurde mit einem Finiten Stabelement diskretisiert und in Achsrichtung mit einer Druckkraft von  $N = 100 \text{ kN}$  belastet. Die zugehörige Beuleigenform ist hier abgebildet. Der Beulfaktor wird zu 0.75 berechnet. Damit liegt die ideale Beullast über der analytisch ermittelten Knicklast von 61.81 kN.



**Abbildung 5: Beuleigenform und verformtes System nach Theorie II. Ordnung**

Auch die Determinatensuche mit der Traglastiteration nach Theorie II. Ordnung liefert eine Stabilitätsgrenze von 75 kN. Die Ursache liegt in der zu groben Diskretisierung. Bei einer Teilung in 2 oder mehr Stäbe sinkt die berechnete ideale Beullast auf  $0.62 \cdot 100 \text{ kN}$  was recht genau mit der analytischen Lösung übereinstimmt. Die zugehörige Beulform wird vom Programm nach Gleichung (11) ermittelt. Wenn man bei der Ermittlung der idealen Beullast mit der Methode der Theorie II. Ordnung arbeitet, so kann man die Beuleigenform näherungsweise auch dadurch erhalten, dass man die Berechnung durch geringe Störlasten aus der Symmetrie bringt. Dadurch „springt“ das System beim Erreichen der Stabilitätsgrenze in die energieärmere Beuleigenform.

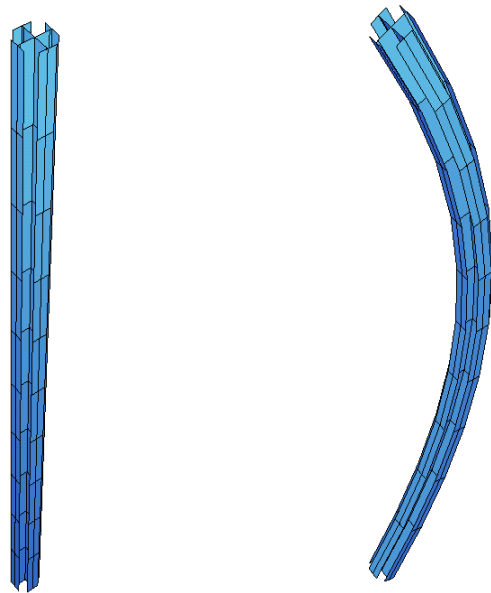
## 4.2 Kreuzförmige Stütze

Eine kreuzförmige Stütze aus zwei gekreuzten Profilen IPE 300 wird mit einer Normalkraft von 100 kN belastet. Diese Last wird bis zum Erreichen der idealen Beullast gesteigert.

Querschnitt: 2xIPE 300  
 $A = 107,6 \text{ cm}^2$   
 $I_z = 8963 \text{ cm}^4$   
 $i_z = 9,13 \text{ cm}$   
 System:  $s_k = L = 8,00 \text{ m}$   
 Material:  $E = 21000 \text{ N/cm}^2$

$$N_{Ki} = p^2 \frac{EI_z}{s_k^2} = 2902 \text{ kN}$$

Die Berechnung des idealen Beulwertes liefert bei einem Element 3414 kN jedoch bei einer Diskretisierung mit zwei oder mehr Stabelementen (ohne Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion) bereits 2790 kN. Die Beuleigenform entspricht ebenfalls einer Knickeigenform.

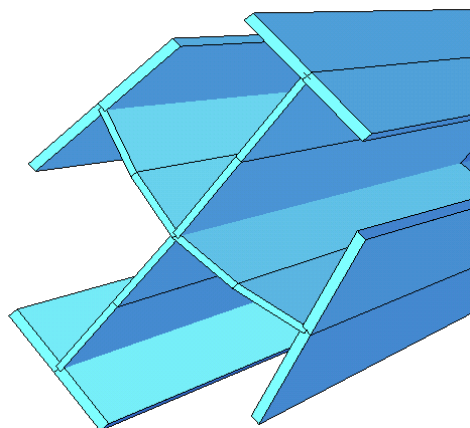


**Abbildung 6: System und 1. Beuleigenform**

Das gleiche Beispiel wurde auch als räumliches Faltnetz mit Schalenelementen diskretisiert. Dabei ergibt sich jedoch ein 1. Beuleigenwert von 16.1 (1610 kN), dessen zugehörige 1. Beuleigenform eine Verdrillung des Querschnitts als Versagensform zeigt. Die 2. Beuleigenform des Faltnetzes entspricht der 1. Beuleigenform der Stabanalyse. Jedoch erkennt man zusätzliche Verformungen innerhalb des Querschnitts:



**Abbildung 7: System und Beuleigenform (256 Elemente)**

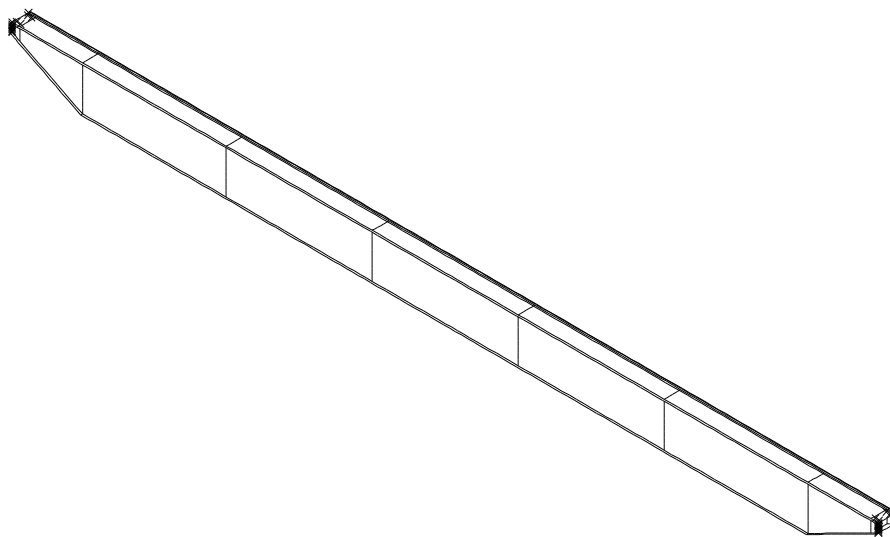


Die Querschnittstreue, die bei Stabwerken vorausgesetzt wird, wird bei Verwendung von räumlichen Schalenelementen nicht mehr eingehalten. Somit ist der Querschnitt weicher als im Stabsystem. Während der Iteration der Stabilitätslast wird dadurch auch die ständige Veränderung der Flächenträgheit berücksichtigt. Es verwundert also nicht, dass der Beulfaktor mit 27.17 (2717 kN) unterhalb der analytischen Lösung liegt.

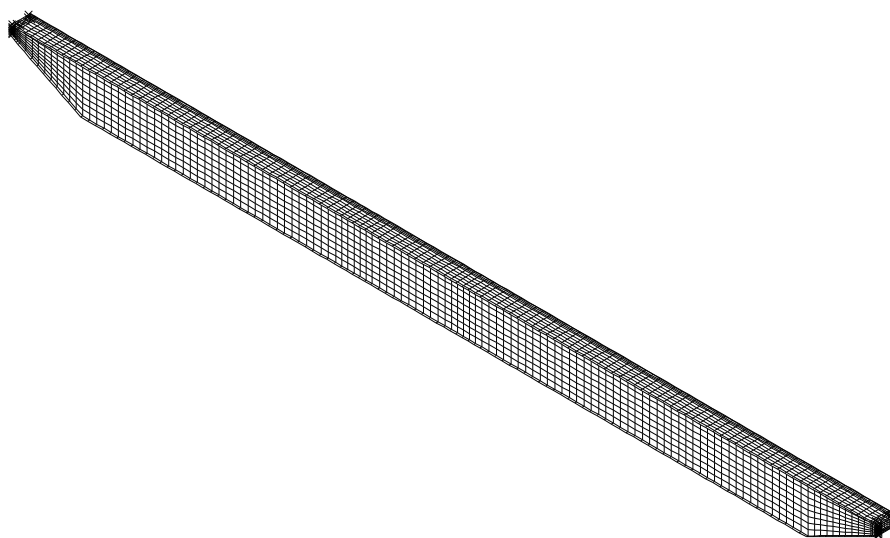
### 4.3 Beispiel eines Kranbrückenträgers

Am Beispiel eines Kranbrückenträgers soll nun noch einmal die Vorgehensweise des Stabilitätsnachweises Schritt für Schritt vorgestellt werden. Es wird die Laststellung der Krankatze in der Mitte des Trägers betrachtet. Der Träger selbst ist ein geschweißter Hohlkasten, der mit Zwischenschotten ausgesteift ist. Wichtig bei der Diskretisierung des Systems ist die genügende Diskretisierung der Beulfelder und die Wahl der korrekten Randbedingungen.

Das oben beschriebene Verfahren, angewandt auf das FE-Modell des Brückenträgers (4472 Knoten, 26676 Gleichungen), liefert als Ergebnis, daß nicht das lokale Versagen des Beulfeldes unter der Krankatze die Traglast bestimmt, sondern je nach Ausbildung der Randbedingung ein seitliches Kippen des Trägers. Das seitliche Ausweichen verhindert das lokale Beulen, so daß am Gesamtsystem der Versagensfall des Kippens die Höhe der Traglast bestimmt.



**Abbildung 8 : Systemkonturen**

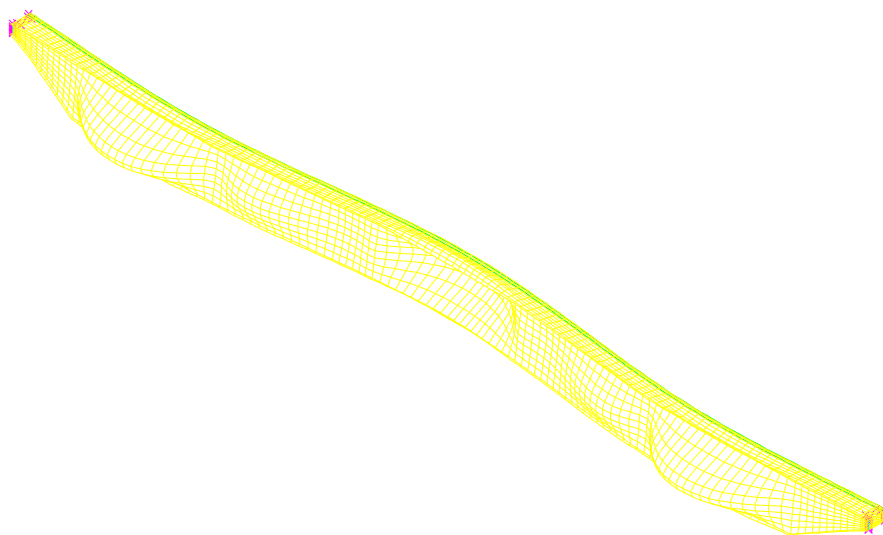


**Abbildung 9 : FE-Netz des Systems (4472 Knoten)**

1. Die lineare statische Berechnung liefert ausreichende Sicherheit (zulässige Spannungen) und Einhaltung der maximal zulässigen Verformungen bei maximaler Radlast. Gebrauchstauglichkeitsnachweis und Spannungsnachweis sind erfüllt.
2. Bestimmung der ersten 5 Eigenformen für den spannungsfreien Zustand liefert folgende Tabelle:

E I G E N F R E Q U E N Z E N (spannungsfrei)  
Ermittlung mit Methode nach Lanczos

Iterationsvektoren				10				
Nr.	LF	Eigenwert [1/Sec <sup>2</sup> ]	Relativer Fehler	omega [1/sec]	Frequenz [Hertz]	Periode [sec]	Lehrsche Daempfung	
1	31	1.23336E+03	5.05E-15	35.119	5.59	.178910	.00000	
2	32	3.26862E+03	5.07E-11	57.172	9.10	.109900	.00000	
3	33	8.64756E+03	1.20E-05	92.992	14.80	.067567	.00000	
4	34	2.18719E+04	4.29E-03	147.892	<b>23.54</b>	.042485	.00000	
5	35	2.60261E+04	3.40E-02	161.326	25.68	.038947	.00000	



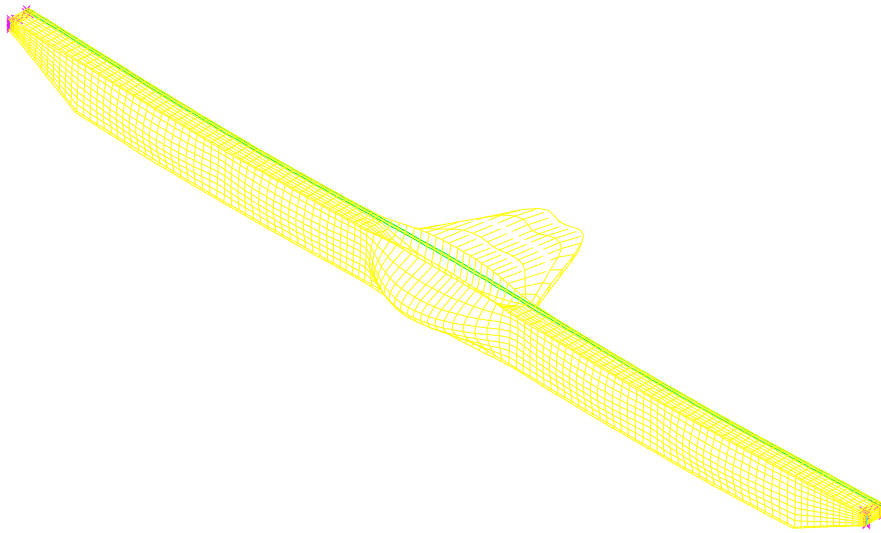
**Abbildung 10 : 4. Eigenform des Brückenträgers (spannungsfrei)**

3. Die Traglastiteration zur Bestimmung der ideellen Beullast des geometrisch perfekten Systems nach TH.II liefert einen Traglastfaktor von über 4
4. Die zur idealen Beullast zugehörigen Eigenfrequenzen ergeben sich aus der folgenden Tabelle:

E I G E N F R E Q U E N Z E N (unter Traglast)  
Ermittlung mit Methode nach Lanczos

Iterationsvektoren				10				
Nr.	LF	Eigenwert [1/Sec <sup>2</sup> ]	Relativer Fehler	omega [1/sec]	Frequenz [Hertz]	Periode [sec]	Lehrsche Daempfung	
1	36	1.44681E+03	4.84E-14	38.037	6.05	.165186	.00000	
2	37	3.85927E+03	6.31E-10	62.123	9.89	.101141	.00000	
3	38	9.63197E+03	1.61E-04	98.143	15.62	.064021	.00000	
4	39	1.80327E+04	8.42E-03	134.286	<b>21.37</b>	.046790	.00000	
5	40	2.51704E+04	3.93E-02	158.652	25.25	.039604	.00000	

5. Dder Vergleich der Eigenfrequenzen ohne Spannungen und unter idealer Beullast zeigt, daß sich die 4. Eigenfrequenz verringert hat. Das ist ein Zeichen dafür, daß diese Eigenform schädlich ist bzw. eine geometrische Imperfektion dieser Form die Stabilitätsgrenze herabsetzt.

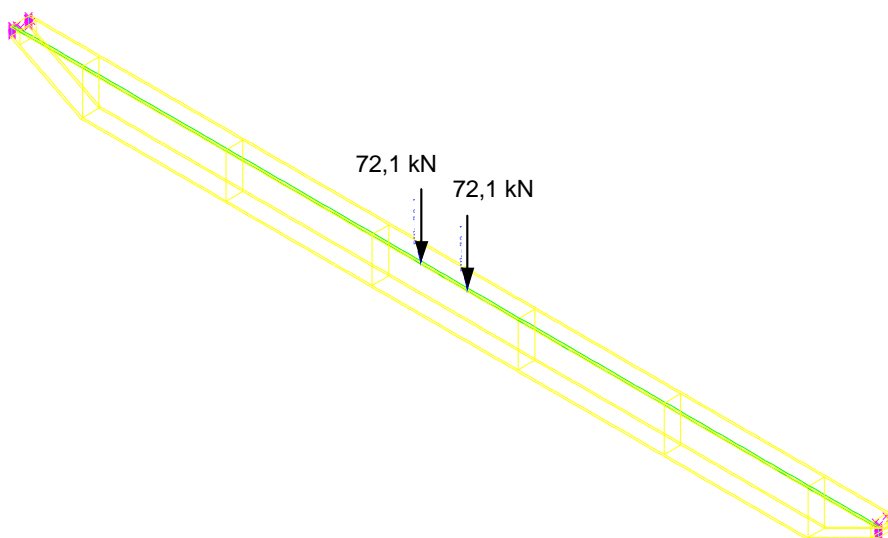


**Abbildung 11 : 4. Eigenform unter Verzweigungslast (Th.II.O.)**

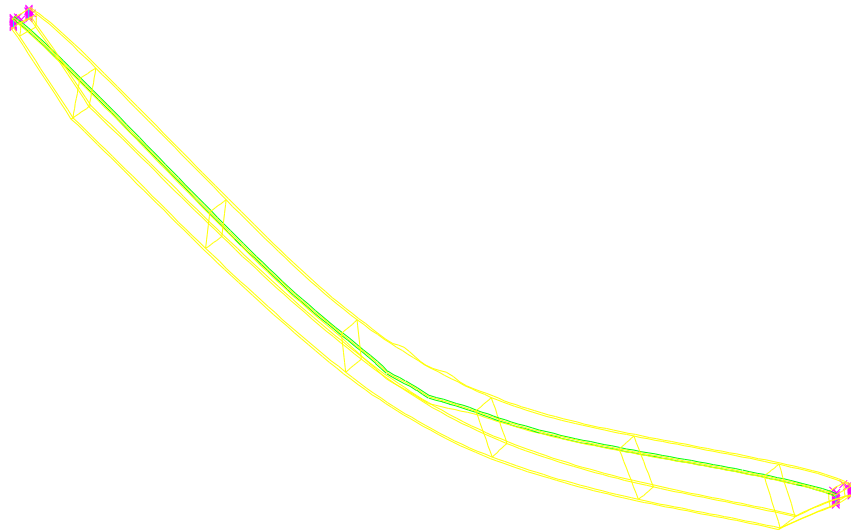
Man erkennt deutlich, daß im Beulfeld in Trägermitte, also unter der Lasteinleitungsstelle, gegenüber der spannungsfreien Eigenform die Verschiebungen stark erhöht sind.

Die 4. Eigenform unter Verzweigungslast wird mit dem Faktor  $1/\nu_{y,max} \cdot b/250 = 1.55E-3$  als geometrische Imperfektion dem Gesamtsystem eingepreßt.

6. Die sich ergebende maximale Traglast aus der geometrisch nichtlinearen Berechnung liefert einen Traglastfaktor von ca. 25



**Abbildung 12 : LF 2 / Katze in Trägermitte**



**Abbildung 13 : 10-fach überhöhte Verschiebungen beim Lastfaktor 25**

7. Die Traglastiteration mit geometrischer Nichtlinearität (THII) und Materialnichtlinearität liefert einen Traglastfaktor von über 4.

Da jedoch schon in Lastfall 42 (Traglastfaktor 2) die vertikalen Verschiebungen größer sind als die vom Auftraggeber geforderte Grenze der Gebrauchstauglichkeit von  $l/1000=23.74\text{mm}$ , ist der Stabilitätsfall nicht bemessungsrelevant. Auf eine genaue Bestimmung der Traglast konnte in diesem Fall verzichtet werden.

#### A U S G E W Ä H L T E E R G E B N I S S E

#### K N O T E N

#### K N O T E N V E R S C H I E B U N G E N

Knot. Nr	LF Nr	Name	VX [mm]	VY [mm]	VZ [mm]	PHIX [mrad]	PHIY [mrad]	PHIZ [mrad]
653	42	MINZ-VX	-3,416	-0,122	8,079	-0,970	-3,554	-0,488
3853	42	MAXZ-VX	3,430	-0,124	8,110	-0,975	3,566	0,490
2433	42	MINZ-VY	-0,441	-5,889	31,888	-1,609	1,293	0,000
562	42	MAXZ-VY	-3,345	0,155	5,865	-0,981	-3,441	-0,495
4403	42	MINZ-VZ	0,186	0,047	-0,085	0,000	1,799	0,112
2188	42	MAXZ-VZ	0,000	-5,851	32,824	-1,509	0,012	0,000

**Listing 1: Maximale Knotenverschiebungen für Traglastfaktor 2**

## 5 Literatur

- [1] DIN 18800, Teil 1 bis 4
- [2] Friemann, H. Seminarband des Workshops „*Biegedrillknicken*“, Technische Universität Darmstadt, Sept. 1998
- [3] Bathe, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden*, Springer Verlag, 1986
- [4] Schneider-Bürger, M.: *Stahlbau-Profile*, Stahleisen Verlag, 1996
- [5] Wissmann, J.: Vorlesungsskript „*Finite Element Methoden II*“, Technische Universität Darmstadt, 1984
- [6] Katz, C.: Programmhandbuch ASE, SOFiSTiK AG München, 1999





**SOFISTIK Service GmbH**

Alte Mainzer Straße 46

55129 Mainz

Tel.: 06131 / 913546-0

Fax: 06131 / 913546-11

E-Mail: [mainz@sofistik.de](mailto:mainz@sofistik.de)

Internet: <http://www.sofistik.de>